SZEGŐ GÁBOR MATEMATIKAVERSENY 2007/2008.

AZ I. FORDULÓ ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓJA

1. Hány olyan pozitív egész szám van, mellyel a 2007-et elosztva a maradék 23 lesz?

Olyan pozitív egész számokat keresünk, amelyek osztói az (2007 – 23 =) 1984-nek, és 23-nál nagyobbak.
$1984 = 2^6 \cdot 31$.
Így a keresett számok: 32; 64; 31; 62; 124; 248; 496; 992 és 1984.
Tehát 9 db ilyen szám van.

2. Egy 6 cm, egy 9 cm, egy 15 cm és egy 18 cm hosszúságú szakaszokból találomra kiválasztunk hármat. Mekkora a valószínűsége, hogy a kiválasztott szakaszokból háromszöget tudunk szerkeszteni?

Az összes esetek száma (n): Négy különböző számból úgy kell kiválasztani hármat, hogy egy szám csak egyszer szerepelhet a kiválasztottak között, és nem számít a kiválasztás sorrendje.
Ez négyféleképpen lehetséges, mert egyet elhagyva kapjuk a lehetséges három számot.
Ezek: {9; 15; 18}; {6; 15; 18}; {6; 9; 18}; {6; 9; 15}
A kedvező esetek száma (k): A kiválasztott számokból csak akkor szerkeszthető háromszög, ha a két rövidebbik oldal összege nagyobb a harmadik oldalnál.

Ezt az első két számhármas teljesíti. Így a keresett valószínűség: $\frac{k}{n} = 0{,}5$.

3. A Verseghy Ferenc Gimnázium természetjáró szakkörének tagjai négynapos túrára indultak. Az első napon megtették a tervezett út 20 %-át, a második napon a hátralévő távolság $\frac{1}{3}$ részét, a harmadik napon a maradék felét, az utolsó nap délelőttjén pedig a hátralévő távolság felét. Így ebéd után még 12 km-t kellett gyalogolniuk.

a) Összesen hány kilométert gyalogoltak a négy nap alatt?

b) Hány kilométert gyalogoltak az egyes napokon?

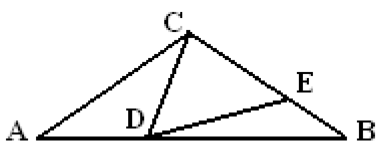
Jelölje x a négy nap alatt megtett kilométerek számát.

napok	1. nap	2. nap	3. nap	4. nap
út (km)	$\frac{x}{5}$	$\frac{4x}{15}$	$\frac{4x}{15}$	$\frac{2x}{15} + 12$

A feladat szövege alapján: $\frac{3x}{15} + \frac{4x}{15} + \frac{4x}{15} + \frac{2x}{15} + 12 = x$

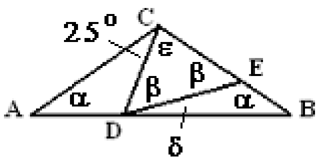
Ebből x = 90 km adódik.
Az 1. nap 18 km-t, a 2., 3. és a 4. napon 24-24 km-t gyalogoltak.
Ezek a számok megoldásai a feladatnak.

4. Az ABC háromszögben AC = BC, CD = CE és ACD szög 25°. Mekkora a BDE szög?



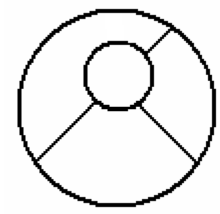
SZEGŐ GÁBOR MATEMATIKAVERSENY 2007/2008.

AZ I. FORDULÓ ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓJA



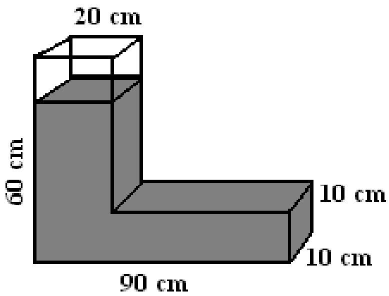
Használjuk az ábra jelöléseit!
A β szög a BDEΔ külső szöge, ezért $\delta = \beta - \alpha$
Az ABCΔ-ben és a CDEΔ-ben írjuk fel a szögek összegét:
$2\alpha + \varepsilon + 25° = 2\beta + \varepsilon = 180°$ Ebből $2\delta = 2(\beta - \alpha) = 25°$.
Így a keresett δ szög 12,5°-os.

5. Az ábrán látható alakzatot szeretnénk kiszínezni úgy, hogy egy-egy rész egyszínű legyen, és a közös határoló vonallal rendelkező részek eltérő színűek legyenek. Ötféle szín áll a rendelkezésünkre. Hányféle különböző színezés lehetséges?



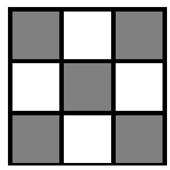
Az alakzat bármely részének van közös határoló vonala minden más résszel.
Így minden újabb rész színezéséhez újabb színre van szükség.
Az első rész színezésénél 5 lehetőség van, a másodiknál 4, a harmadiknál 3, és a negyediknél 2.
Tehát az összes lehetőségek száma $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$.

6. Egy L alakú edényt függőleges szárának $\frac{4}{5}$ részéig töltöttünk meg vízzel. Belefér-e ez a vízmennyiség a 40 cm × 25 cm × 17 cm-es téglatest alakú edénybe?



A vízszintes szárban lévő víz térfogata $V_v = 10 \cdot 10 \cdot 90 = 9000\ cm^3$.
A függőleges szárban lévő víz térfogata $V_f = 10 \cdot 20 \cdot 60 \cdot 0{,}8 = 9600\ cm^3$.
A két szár közös részében lévő térfogat $V_k = 10 \cdot 10 \cdot 20 = 2000\ cm^3$.
Az edényben lévő víz térfogata $V = V_v + V_f - V_k = 16600\ cm^3$.
A téglatest alakú edény térfogata $V_e = 40 \cdot 25 \cdot 17 = 17000\ cm^3$.
Az L alakú edényben lévő víz elfér a téglatest alakú edényben, mert $V < V_e$.

7. Egy egységnyi oldalú négyzetet kilenc egybevágó kisebb négyzetre osztottunk, és a részekből ötöt az ábrán látható módon beszíneztünk. Ezt az eljárást a fehéren maradó kisnégyzetekkel megismételjük.



a) Az eredeti négyzet hányad része maradt fehér az első lépés után?

b) Az eredeti négyzet hányad része színezett a második lépés után?

a) A négyzet területe A = 1 te.

Az első lépés után a fehéren maradt rész területe $A_{f1} = \frac{4A}{9}$.

Így az eredeti négyzet 4/9 része fehér az első lépés után.

b) Az első lépés után a színezett rész területe $A_{sz1} = \frac{5A}{9}$. A második lépésben

még beszínezünk $A_{sz2} = \frac{5A_{f1}}{9} = \frac{20A}{81}$ területű részt.

Az összes beszínezett rész területe $A_{sz} = A_{sz1} + A_{sz2} = \frac{65A}{81}$.

Tehát a második lépés után az eredeti négyzet $\frac{65}{81}$ része színezett.

8. Egy derékszögű háromszög befogói a és b, átfogója c, mindhárom szám egész. Bizonyítsd be, hogy az a, b és c számok között páratlan számú 3-mal osztható szám van!

A 3-mal osztható oldalak számát tekintve az alábbi négy eset lehetséges: 0; 1; 2 és 3 db. Bebizonyítjuk, hogy páros számú (0 vagy 2 db) 3-mal osztható oldala nem lehet a derékszögű háromszögnek.
A háromszög derékszögű, így az oldalai között érvényes az $a^2 + b^2 = c^2$ összefüggés.

1. Nem lehet 2 db 3-mal osztható oldal:
   Ha két oldal osztható lenne hárommal, akkor azok négyzete is osztható 3-mal.
   A 3-mal osztható számok összege és különbsége is osztható 3-mal.
   Így a Pitagorasz-tétel értelmében a harmadik oldal is osztható 3-mal.
   Ha két oldal osztható 3-mal, akkor a harmadik is.
   Tehát nem lehet 2 db 3-mal osztható oldala a derékszögű háromszögnek.
2. Nem lehet 0 számú 3-mal osztható oldal sem:
   Ha nem lenne 3-mal osztható oldal, akkor minden oldal 3-mal osztva maradékot adna.
   Ez a maradék csak 1 vagy 2 lehetne.
   A $3k + 1$ és a $3k + 2$ alakú számok négyzete mindig $3k + 1$ alakú lesz
   ($9k^2 + 6k + 1$; $9k^2 + 12k + 3 + 1$).
   Így a két befogó négyzetének összege minden esetben $3k + 2$ alakú,
   amely nem lehet egyenlő a $3k + 1$ alakú átfogó négyzetével.
   Tehát nem lehet 0 db 3-mal osztható oldala sem a derékszögű háromszögnek.

Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.