# SZEGŐ GÁBOR MATEMATIKAVERSENY

## Az I. FORDULÓ feladatainak megoldása

**1. Egy hasábnak 2008 csúcsa van. Mennyi a hasáb éleinek száma?**

A hasábok minden csúcsa az alap- és a fedőlap mentén található. A két síkidom csúcsainak száma azonos.
Ezek szerint ennek a hasábnak 1004 oldalú sokszög az alapja (és a fedőlapja is). Így összes éleinek száma: $3 \cdot 1004 = 3012$.

8 pont

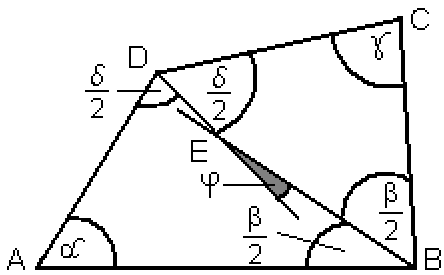
**2. Négy kifli kerül annyiba, mint egy szendvics, három szendvics pedig annyiba, mint egy hamburger. A hamburger 40 forinttal drágább a szendvicsnél. Mennyibe kerül 4 kifli, 3 szendvics és 2 hamburger?**

Egy kifli ára: k, egy szendvicsé: s, egy hamburgeré: h. A feladat feltételei alapján: $4k = s$, $3s = h$, $h = s + 40$. A két utolsó egyenletből $s = 20$ és $h = 60$. Ebből az első egyenlet alapján $k = 5$. Így 4 kifli, 3 szendvics és 2 hamburger ára: 200 Ft.

12 pont

**3. Egy négyszög két szemközti szöge 73° és 63°. Mekkora szöget zár be egymással a másik két szög szögfelező egyenese?**

Legyen $\alpha = 63°$ és $\gamma = 73°$. A másik két szög összege: $\beta + \delta = 360° - (63° + 73°) = 224°$. A BCDE négyszög E csúcsánál lévő szöge: $360° - \left(\gamma + 0{,}5\beta + 0{,}5\delta\right) = 175°$. A két szögfelező egyenes hajlásszöge: $\varphi = 180° - 175° = 5°$.




13 pont

**4. Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amelyben az első két számjegy összeolvasásával kapott kétjegyű számhoz a harmadik és negyedik számjegyet hozzáadva az utolsó két számjegy összeolvasásával kapott kétjegyű számot kapjuk? (Pl.: 1821 jó, mert 18 + 2 + 1 = 21.)**

Legyen a keresett szám $\overline{abcd}$ alakú. A feltételek szerint: $10a + b + c + d = 10c + d$, ahonnan $10a + b = 9c$. Tehát $10a + b$ osztható 9-cel. Mivel $10a + b \geq 10$, így c lehetséges értékei 2, 3, …, 9, amely 8-féle érték. A c egy értéke esetén a és b egyértelműen meghatározható. Az egyenlet rendezése során d kiesett, azaz d bármelyik számjegy lehet. Így $8 \cdot 10 = 80$ ilyen szám van.

15 pont

## SZEGŐ GÁBOR MATEMATIKAVERSENY

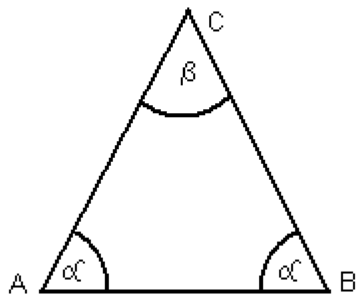
Az I. FORDULÓ feladatainak megoldása

**5. Egy szimmetrikus háromszög két belső és egy külső szögének összege 270°. Mekkorák lehetnek a háromszög belső szögei?**

A feladat feltételei alapján a megadott szögek összegére az alábbi négy eset lehetséges:

$2\alpha + 180° - \alpha = 270°$, $\quad 2\alpha + 180° - \beta = 270°$,

$\alpha + \beta + 180° - \alpha = 270°$, $\quad \alpha + \beta + 180° - \beta = 270°$.




Az első egyenlet alapján $\alpha = 90°$. Ez a háromszögek belső szögeinek összegére vonatkozó összefüggés alapján nem lehetséges.

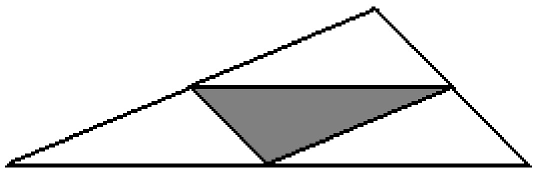
A második egyenlet rendezése után: $2\alpha - \beta = 90°$. Az egyenlet mindkét oldalához $2\beta$-át adva: $2\alpha + \beta = 180° = 90° + 2\beta$. Ebből $\beta = 45°$ és $\alpha = 67{,}5°$.

A harmadik egyenletből $\beta = 90°$ és $\alpha = 45°$.

A negyedik egyenlet alapján $\alpha = 90°$. Ez a háromszögek belső szögeinek összegére vonatkozó összefüggés alapján nem lehetséges.

13 pont

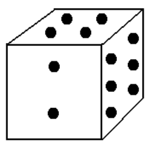
**6. Egy általános háromszöget oldalfelező pontjainak összekötésével négy egybevágó háromszögre osztjuk (nézd az ábrát). A középső háromszöget szürkére festjük. A fehér háromszögekkel a fenti eljárást megismételjük. Az eredeti háromszögnek hanyadrészét festettük szürkére?**



Mivel az egybevágó síkidomok területe egyenlő, ezért az eredeti háromszög egy-negyed részét festettük szürkére az első lépésben. A második lépésben az elsőhöz hasonlóan egy-egy fehér háromszög egynegyedét festjük szürkére. Ez az eredeti háromszög $3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$ része. Így összességében az eredeti háromszög $\frac{1}{4} + \frac{3}{16} = \frac{7}{16}$ részét festettük szürkére.

10 pont

**7. Az ábrán látható kockán az alsó lapon 5, a hátsón 1, a bal oldalin pedig 3 pont látható. Ha a kezembe fogom a kockát, egyik csúcsát magam felé fordítva, legfeljebb hány pontot láthatok egyszerre?**



Egy kockának legfeljebb 3 lapja látható. Ennek a három lapnak egy közös csúcsa van. Három lapon legfeljebb $15 = 4 + 5 + 6$ pont látható. A 4 és az 5 egymással szemközti oldalakon található. Így nem látható egyszerre. A 14 csak úgy adódhat, hogy $3 + 5 + 6$. Ez sem lehetséges, mivel a 3 és a 6 szemközti oldalakon helyezkedik el. A 13 viszont elérhető, ha az első, az alsó és a jobb oldali lapot látjuk: $13 = 2 + 5 + 6$.

15 pont

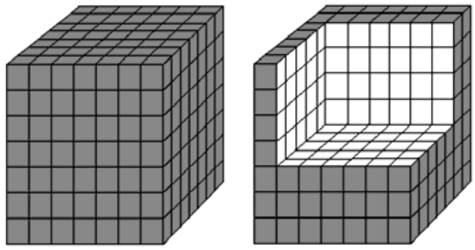
# SZEGŐ GÁBOR MATEMATIKAVERSENY

## Az I. FORDULÓ feladatainak megoldása

**8. A bal oldali teljes kocka tömege 34,3 kg. A kockák élhosszúsága 7 egység.**

**a) Hány kilogramm a jobb oldali hiányos kocka tömege?**

**b) A teljes kocka szürkére festéséhez 2,94 kg festékre volt szükség. Hány kilogramm festékre van szükség a jobb oldali kocka fehér részeinek szürkére festéséhez?**



a) A kocka térfogata $V = a^3 = 7^3 = 343$ térfogategység. Így egy kis kocka (egy térfogategység) tömege 0,1 kg. Ha a teljes kockából megfelelő módon vágunk ki egy olyan téglatestet, amelynek élei 4, 5 és 6 egység hosszúak, akkor a hiányos kockát kapjuk. Így a hiányos kocka térfogata $V_{hiányos} = V - V_{téglatest} = 7^3 - 4 \cdot 5 \cdot 6 =$
$= 343 - 120 = 223$ térfogategység. Tehát a hiányos kocka tömege 22,3 kg.

b) A kocka felszíne $A = 6a^2 = 6 \cdot 7^2 = 294$ területegység. Tehát egy területegység szürkére festéséhez 0,01 kg tömegű festékre van szükség. A hiányos kocka fehér részei egy $4 \times 5$, egy $4 \times 6$ és egy $5 \times 6$-os élhosszúságú téglalap. Ezek együttes területe: $A_f = 20 + 24 + 30 = 74$ területegység. Tehát a fehér részek szürkére festéséhez 0,74 kg tömegű festékre van szükség.

14 pont

**Mindösszesen 100 pont**