

SZEGŐ GÁBOR MATEMATIKAVERSENY

A II. FORDULÓ feladatainak megoldása

1. Béla karórája naponta 12 másodpercet siet. István órája naponta 8 másodpercet késik. Tegnap este 8 órakor mindketten beállították az órájukat. Hány nap múlva mutat Béla órája pontosan 12 perccel többet, mint az Istváné?

Jelölje t a pontos időt, x pedig az órák beállításától számított eltelt napok számát.
 x nap múlva Béla órája $t + 12x$ -et mutat, Istváné $t - 8x$ -et.

A feladat feltételei szerint $t + 12x - (t - 8x) = 12 \cdot 60$. Ebből $x = 36$.

Tehát 36 nap múlva fog Béla órája 12 perccel többet mutatni, mint az Istváné.

10 pont

2. Egy kalapban 101 kártya van, 1-től 101-ig megszámozva. Hány kártyát kell a sötétben kivennünk a kalapból, hogy a villany felkapcsolása után a kiválasztott lapok között biztosan találjunk két olyat, amelyekre írt számok összege 102?

Párosítsuk a kártyákat úgy, hogy a két kártyán lévő szám összege 102 legyen: 1 és 101, 2 és 100, 3 és 99, ... 50 és 52. Végül marad az 51-es kártya, amelynek nincs párja. A párokban lévő kártyákon a számok összege 102, és bármelyik két, nem egy párban lévő kártyán a számok összege nem lehet 102. Így akkor lehet biztosan kiválasztani két olyan kártyát a kihúzottak közül, melyekre írt számok összege 102, ha valamelyik pár mindkét elemét kihúzzuk. Ez biztosan bekövetkezik, ha 52 kártyát húzunk ki, hiszen $50 + 1 = 51$ csoportot képeztünk. Így az 52. húzás után valamelyik pár mindkét elemét kihúzzuk.

16 pont

3. Egy test egyik lapja tizennégy-szög. Legalább hány lapja van ennek a testnek?

A tizennégy-szög minden oldalához kell egy lapnak csatlakoznia. Így ennek a testnek a tizennégy-szöggel együtt legalább 15 lapja van. Ilyen test létezik, ez a tizennégy-szög alapú gúla.

10 pont

4. Valamilyen szabály szerint leírtunk öt számot, de néhány szám bizonyos számjegyeit letakartuk. Add meg a számokat, és ismertesd a szabályt!

2□□

22□

2□8

240

264

A két utolsó szám különbsége 24. A harmadik és negyedik szám különbsége nem lehet 24, mert a 3. szám 8-ra végződik ($240 - 24 = 216$). Ez akkor lehetséges, ha köztük a különbség 12, vagyis fele, mint az utánuk következő két szám esetén. Ezt a szabályt követve a 2. és a 3. szám különbsége 6, az 1. és a 2. számé 3. Így az öt szám: 219, 222, 228, 240, 264.

12 pont

5. Dani növekvő sorrendben írta le azokat a háromjegyű számokat, amelyeknek mindhárom számjegy különböz. Mennyivel nagyobb az utolsónak leírt szám az elsónél?

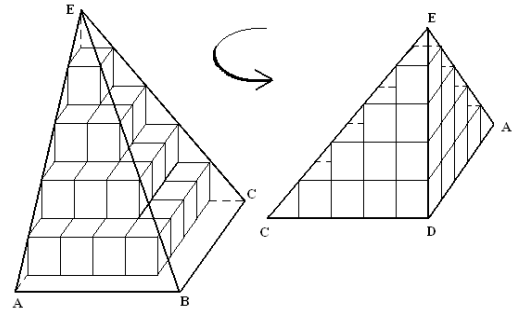
A feladat feltételeinek megfelelő számok közül a legkisebb 102, a legnagyobb 987. Így az utolsó szám $987 - 102 = 885$ -tel nagyobb az elsónél.

10 pont

SZEGŐ GÁBOR MATEMATIKAVERSENY

A II. FORDULÓ feladatainak megoldása

6. Harminc darab 1 dm^3 térfogatú kockát az ábrán látható módon összerakunk, majd egy négyzet alapú gúlát helyezünk a kockák köré. Mekkora a gúla térfogata?

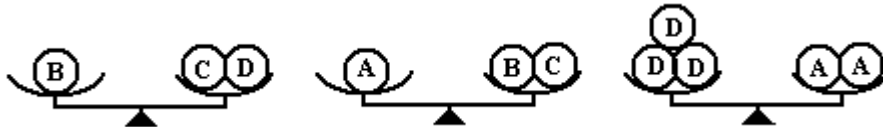


A kockák élei 1 dm hosszúak. Az ábráról leolvasható, hogy a CDE és az ADE oldallapok egyenlő szárú derékszögű háromszögek, amelyek befogói 5 dm hosszúak. Így a gúla DE magassága és a gúla alapját képező négyzet oldalai (CD és AD) is 5 dm

hosszúak. A gúla térfogata: $V = \frac{T \cdot m}{3} = \frac{5^2 \cdot 5}{3} = \frac{125}{3} \text{ dm}^3$.

10 pont

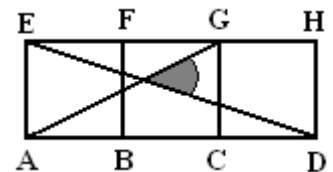
7. Az ábrán látható mérlegek egyensúlyban vannak. Hány darab C jelű súllyal egyensúlyozhatunk ki egy B jelűt?



Az első két mérleg alapján $A = 2C + D$. Így $2A = 4C + 2D$. Felhasználva a harmadik mérleg egyensúlyát: $2A = 3D = 4C + 2D$. Ebből $D = 4C$. Ekkor viszont az első mérleg alapján $B = 5C$.

16 pont

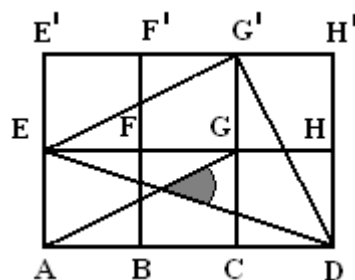
8. Az ábrán három egymás mellé rajzolt négyzet látható. Hány fokos a szürkére festett szög?



A DE átló kivételével toljuk el a négyzeteket az AE irányított szakasszal. Így EG' párhuzamos AG -vel. Tehát a $G'ED$ szög egyenlő a keresett szöggel.

Az EG' merőleges $G'D$ -re és $EG' = G'D$, mert a $G'CDH'$ téglalap a $G'GEE'$ téglalap 90° -os elforgatottja.

Az EDG' háromszög tehát egyenlő szárú derékszögű háromszög. Így a keresett szög 45° -os.



16 pont

Mindösszesen 100 pont