SZEGŐ GÁBOR MATEMATIKAVERSENY

Az I. FORDULÓ feladatainak megoldása

1. Tíz, külsőleg teljesen egyforma golyó közül egy súlyosabb a többinél. Kétkarú mérleggel, súlyok nélkül legkevesebb hány méréssel lehet biztosan kiválasztani a nehezebb golyót?

Ha a mérleg serpenyőibe 1-1 golyót helyezünk, akkor előfordulhat, hogy csak az ötödik méréssel tudjuk kiválasztani a súlyosabb golyót.

Ha 2-2 golyót helyezünk a serpenyőkbe, akkor legkevesebb 3 méréssel lehet biztosan kiválasztani a súlyosabb golyót.

Ha 3-3 golyót helyezünk a serpenyőkbe, akkor is kell 3 mérés, hogy biztosan ki tudjuk választani a nehezebb golyót.

4-4 golyó esetén is szükséges a 3 mérés a biztos kiválasztáshoz.

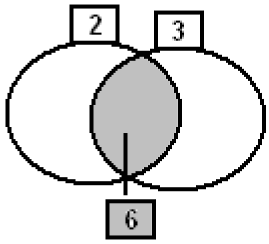
5-5 golyó estén is szükséges a 3 mérés.

Tehát legkevesebb 3 mérésre van szükség ahhoz, hogy biztosan kiválasztható legyen a súlyosabb golyó.

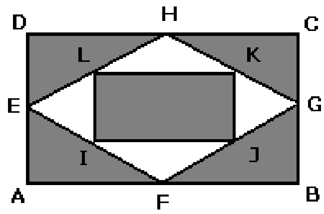
2. Egy papírlapra felírtuk az első 2009 pozitív egész számot. Andris először aláhúzta az összes páros számot, majd aláhúzta az összes 3-mal osztható számot, végül aláhúzta az összes 4-gyel osztható számot. Hány számot nem húzott alá Andris?

Azok a természetes számok, amelyek 4-gyel oszthatók, oszthatók 2-vel is. Így a 4-gyel való oszthatóság a feladat feltételei alapján nem jelen újabb feltételt.
A 2-vel és 3-mal osztható (tehát 6-tal) osztható számokat Andris kétszer húzta alá.

2009-ig 1004 db 2-vel osztható, 669 db 3-mal osztható és 334 db 6-tal osztható szám van. Így a legalább egyszer aláhúzott számok száma 1004 + 669 – 334 = 1339.
Tehát Andris 2009 - 1339 = 670 db számot nem húzott alá.



3. Az ABCD téglalap oldalfelező pontjai E, F, G és H. Az EFGH négyszög oldalfelező pontjai I, J, K és L. Az ABCD téglalap területének hányadrésze a szürkével jelölt rész területe?



Jelöljük az ABCD téglalap oldalait a-val és b-vel. Így a téglalap területe $t_{ABCD} = ab$. Az ABCD téglalap csúcsainál keletkezett derékszögű háromszögek egybevágóak, mert két-két oldaluk ($\frac{a}{2}$; $\frac{b}{2}$) és az általuk közbezárt szög (derékszög) a háromszögekben egyenlők. Területük összege $t_1 = 4\frac{ab}{8} = \frac{ab}{2}$. Az EFH$\Delta$ ~ EILΔ, mert szögeik egyenlők.

A hasonlóság aránya 2 **:** 1. Hasonló állítás érvényes az EGH és az LKHΔ-re is. Így az IJKL téglalap oldalai $\frac{a}{2}$ és $\frac{b}{2}$, a területe pedig $t_{IJKL} = \frac{ab}{4}$. A szürkével jelölt rész területe $t_{SZ} = t_1 + t_{IJKL} = \frac{3ab}{4}$. Tehát a téglalap területének $\frac{t_{SZ}}{t_{ABCD}} = \frac{3}{4}$.

4. Van-e olyan konvex sokszög, amelynek ötször annyi átlója van, mint amennyi oldala?

Az n-oldalú konvex sokszög átlóinak száma $\frac{n(n-3)}{2}$, oldalainak száma n. A feladat feltételei alapján $\frac{n(n-3)}{2} = 5n$ egyenletet írhatjuk fel. Átalakítás után $n^2 - 13n = 0$. Kiemelés után $n(n - 13) = 0$. Ebből $n_1 = 13$ és $n_2 = 0$. A feladatnak azonban csak a 13 felel meg. Tehát a 13 oldalú sokszögnek ötször annyi átlója van, mint oldala.

5. Hány nullára végződik a $\frac{118!}{59!}$ szám? (Ha $n! = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-1)\,n$. Ejtése: n faktoriális. Pl.: $6! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6 = 720$)

$\frac{118!}{59!} = 60\cdot61\cdot\ldots\cdot118$. Egy szám pontosan akkor végződik k számú nullára, ha osztható 10^k-nal, de 10^{k+1}-nel már nem osztható. Mivel $10 = 2\cdot5$ és a 2-es prímtényező minden második tényezőben előfordul, az 5-ös prímtényező csak minden ötödikben. Ezért csak az 5-ös prímtényezők számát kell összeszámolnunk. A $60\cdot61\cdot\ldots\cdot118$ szorzat minden ötödik tényezőjében szerepel az 5-ös prímtényező, és minden huszonötödik tényezőben (75; 100) kétszer is előfordul. Az 5-ös prímtényezők száma: $12 + 2 = 14$. Így a $\frac{118!}{59!}$ szám 14 db nullára végződik.

6. Egy autós kiszámolta, hogy 60 $\frac{km}{h}$ átlagos sebességgel haladva délután 17 órakor ér célba. Ha pedig átlagos sebessége 80 $\frac{km}{h}$, akkor délután 14 órakor érkezik meg. Mekkora sebességgel haladjon, ha délután $15^{\underline{30}}$-kor szeretne megérkezni?

Jelöljük s-sel az autós útját km-ekben, t-vel pedig a menetidőt 17 óráig órákban mérve.
A feladat feltételei alapján az alábbi egyenleteket írhatjuk fel:

$$\left.\begin{aligned} s &= 60t \\ s &= 80(t-3) \end{aligned}\right\}$$ Ennek az egyenletrendszernek a megoldása: s = 720 km és t = 12 h.

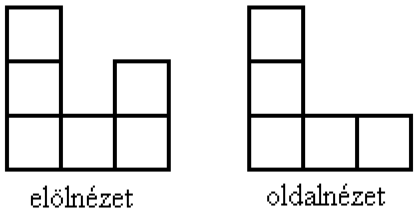
A keresett átlagos sebesség: $v = \frac{720\,\text{km}}{10{,}5\,\text{h}} = \frac{480\,\text{km}}{7\,\text{h}} \approx 68{,}57\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

7. Egy négyzet alapú egyenes gúla magassága 16 cm. Mekkora a gúla térfogata, ha 6 ilyen gúlából egy kockát rakhatunk össze?

A gúlákból úgy rakhatjuk össze a kockát, hogy a gúlák csúcsa a kocka középpontjába kerül. A gúlák alapjai pedig a kocka oldallapjait alkotják. Így a kocka magassága (oldala) 2·16 cm = 32 cm.

Tehát a gúla térfogata $V = \frac{32^3}{6} cm^3 = \frac{16384}{3} cm^3 \approx 5461{,}33 cm^3$.

8. Egy vízszintes felületre teszünk néhány párhuzamos helyzetű kockát. Elölnézete és oldalnézete az ábrán látható. Mennyi a kockák minimális és maximális száma?



Az elölnézeti rajzon 6 kockát látunk. Az oldalnézeti rajz alapján még minimum két kockát le kell tenni. Az elölnézeti rajz alsó sorának középső kockája lehet a második sorban is. Így a kockák minimális száma 6+2-1 = 7. A további kockák száma azonban nem lehet több 3·2 = 6-nál.
Tehát a kockák minimális száma 7, a maximális pedig 12.