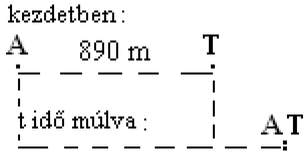
SZEGŐ GÁBOR MATEMATIKAVERSENY

Az II. FORDULÓ feladatainak megoldása

1. Akhilleusz utol akarja érni az előtte 890 méterre mászó teknősbékát. Akhilleusz 1 másodperc alatt 9 métert tesz meg, a teknős pedig 11 másodperc alatt 1 métert. Hány másodperc alatt éri utol?

Jelölje t másodpercekben azt az időt, amely alatt Akhilleusz utoléri a teknőst.



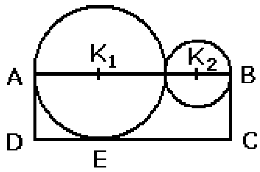
Ekkor az alábbi egyenletet írhatjuk fel: $9t = 890 + \frac{1}{11}t$

Ebből t = 99,90 s.

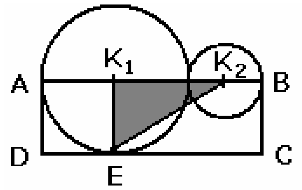
2. Adottak az a – 1, a – 2, a – 3, …, a – 84 számok. Mennyi lesz a számok szorzata, ha a = 59?

A szorzat 5. tényezője 0, mert 59 – 59 = 0. Így a szorzat is nulla.

3. Az ábrán látható, K_1 és K_2 középpontú körök érintik egymást. A K_1K_2 egyenes a köröket A és B pontokban metszi. A CD egyenes a nagyobbik kört E-ben érinti. Hány cm^2 a K_1K_2E háromszög területe, ha az ABCD téglalapé $21\ cm^2$?



Jelölje a körök sugarait r_1 és r_2. Ekkor a téglalap területe: $t_{ABCD} = 2(r_1 + r_2)r_1 = 21\ cm^2$. A K_1K_2E derékszögű háromszög befogói r_1 és $r_1 + r_2$. Így a területe: $t_{K1K2E} = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)r_1 = \frac{1}{4}t_{ABCD} = \frac{21}{4}cm^2 = 5{,}25\ cm^2$.



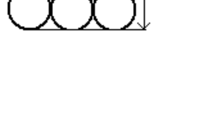
4. A gyerekek játszanak. Sorolják a pozitív egész számokat 1-től 500-ig, és ha a sorra következő szám osztható 3-mal vagy 4-re végződik, akkor helyette Csillag-ot kell mondani. Összesen hányszor mondanak Csillag-ot?

Minden harmadik szám osztható 3-mal. Így 1-től 500-ig 166 ($= \left[\frac{500}{3}\right]$) 3-mal osztható szám van. 1-től 500-ig minden 10. (4; 14; 24; …; 594) szám 4-re végződik. Ezek száma tehát 50. Ezen számok közül minden harmadik 3-mal is osztható. Az ilyen számok száma: 16 ($= \left[\frac{50}{3}\right]$). Ezeket a számokat kétszer vettük számításba.

Így ezek számát a 166 + 50 összegből le kell vonni.

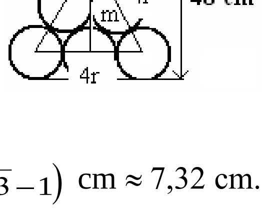
Tehát a gyerekek 166 + 50 – 16 = 200-szor mondanak Csillagot.

5. Hat darab azonos átmérőjű csövet az ábrán látható módon összekötünk. Mekkora a csövek sugara, ha a köteg magassága 40 cm?



Jelölje r a csövek sugarait. Így az ábra szerinti szabályos háromszög oldalai 4r hosszúságúak. A köteg magassága m + 2r = 40 cm, ahol m a szabályos háromszög magasságát jelöli.

A Pitagorasz-tétel segítségével m meghatározható: $m = \sqrt{(4r)^2 - (2r)^2} = \sqrt{12r^2} = 2r\sqrt{3}$. Ezt felhasználva:

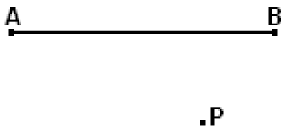


$2r\sqrt{3} + 2r = 2r(\sqrt{3} + 1) = 40$ cm. Ebből $r = \frac{20}{\sqrt{3} + 1}$cm $= 10(\sqrt{3} - 1)$ cm ≈ 7,32 cm.

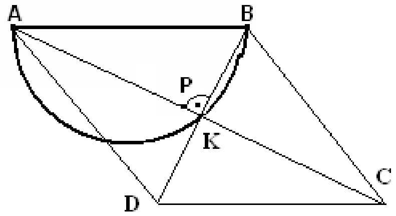
SZEGŐ GÁBOR MATEMATIKAVERSENY

Az II. FORDULÓ feladatainak megoldása

6. Az ábrán látható szakasz egy rombusz egyik oldala, a P pont pedig az egyik átlójának egy pontja. Hogyan kell megszerkeszteni a rombuszt? Hány megoldása van a feladatnak?



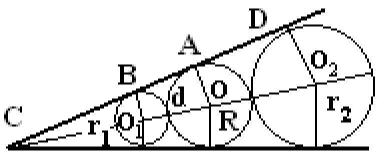
A rombusz olyan paralelogramma, amelynek az oldalai egyenlő hosszúságúak. A rombusz átlói merőlegesek egymásra, és felezve metszik egymást.



Használjuk az ábra jelöléseit! A rombusz átlóinak K metszéspontja két tulajdonsággal rendelkezik. Egyrészt illeszkedik az AP félegyenesre, másrészt a BK félegyenes merőleges az AP félegyenesre. Így a K-t az AP félegyenes és az erre a B pontból állított merőleges metszéspontja határozza meg. A rombusz D csúcsa illeszkedik a BK félegyenesre, és a K ponttól BK távolságra van. A rombusz C csúcsa illeszkedik az AP (AK) félegyenesre, és a K ponttól AK távolságra van. Ezzel a rombusz csúcsait meghatároztuk.

Az előzőhöz hasonlóan egy újabb megoldást kapunk, ha a P pont nem az AC átlónak, hanem a BD átlónak az egyik pontja.

7. Egy α szög szárait egy olyan R = 7,2 cm sugarú kör érinti, amelynek középpontja a szög csúcsától 12 cm távolságra van. Egy másik, r sugarú kör érinti a szög szárait és a R sugarú kört. Mekkora a r?



A $COA\Delta \sim CO_1B\Delta$, mert a megfelelő szögeik egyenlők. Ezért a megfelelő oldalak aránya is egyenlő: $\frac{R}{d} = \frac{r_1}{d-R-r_1}$ Ebből $r_1 = \frac{R(d-R)}{d+R}$= 1,8 cm.

A $COA\Delta$ és a $CO_2D\Delta$ hasonlóságából kapjuk meg a másik kör sugarát. $r_2 = \frac{R(d+R)}{d-R}$= 28,8 cm.

8. Egy 4 m × 5 m × 3 m méretű helyiségben 181 szúnyog röpköd. Bizonyítsuk be, hogy minden pillanatban van 4 olyan szúnyog, amelyek közül bármely kettő távolsága $\sqrt{3}$ méternél nem nagyobb!

A helyiség térfogata: V = 4·5·3 m^3 = 60 m^3. Az 1 m élhosszúságú kocka testátlójának hossza a Pitagorasz-tétel alapján: d = $\sqrt{3}$ m. Ha minden ilyen kockába 3-3 szúnyogot teszünk, akkor csak 3·60 = 180 szúnyogot helyeztünk el a helyiségben. Így valamelyik kockában biztosan 4 szúnyog lesz, mert 181 szúnyog van. Ezen szúnyogok közötti távolságok azonban nem lehetnek hosszabbak a kocka testátlójának hosszánál, azaz d-nél. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.