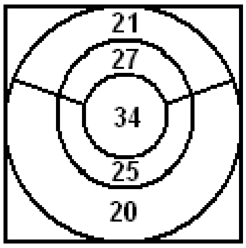
SZEGŐ GÁBOR MATEMATIKAVERSENY 2010/2011.

AZ I. FORDULÓ FELADATAINAK MEGOLDÁSAI

1. A négyjegyű páros számok összegét jelöljük x-szel, a négyjegyű páratlan számok összegét pedig y-nal. Melyik szám a nagyobb és mennyivel?

A legkisebb négyjegyű szám az 1000. A legnagyobb pedig a 9999. 1000-től 9999-ig 9000 db négyjegyű szám van. Ezek fele páros. Tehát 4500 páros, illetve 4500 páratlan négyjegyű szám van. A feladat feltételei alapján: $x = 1000 + 1002 + \ldots + 9998$,
$y = 1001 + 1003 + \ldots + 9999 = (1000 + 1) + (1002 + 1) + \ldots + (9998 + 1) = x + 4500$. Tehát a négyjegyű páratlan számok összege 4500-zal nagyobb a négyjegyű páros számok összegénél.

2. Az ábrán egy speciális céltábla látható. Az egyes részekbe írt számok azt az értéket jelentik, amennyit az oda becsapódó lövedék ér. Hogyan érhetnénk el 6 találattal pontosan 125 pontot?



A 27-es és a 34-es részbe nem csapódhat lövedék, mert a legkisebb pontszámú rész a 20-as. ($5\cdot 20 + 27 = 127 > 125$, illetve $5\cdot 20 + 34 = 134 > 125$) Ha mindig a 20-asba találunk, akkor $6\cdot 20 = 120$ pontot érünk el. Így még 5 pont hiányzik. Tehát 5 lövés 20-as és 1 lövés 25-ös, vagy 1 lövés 20-as és 5 lövés 21-es.

3. 6300 Ft-ot három munkás között osztanak szét a teljesítményük arányában. Hány forintot kap egy-egy munkás, ha egy ugyanolyan munkadarabot 1,5 perc, 2 perc, illetve 3 perc alatt készítenek el?

A munkások teljesítményeinek aránya: $P_1 : P_2 : P_3 = \frac{1}{1{,}5}:\frac{1}{2}:\frac{1}{3}$.

Hozzuk közös nevezőre: $\frac{1}{1{,}5}:\frac{1}{2}:\frac{1}{3}=\frac{4}{6}:\frac{3}{6}:\frac{2}{6}$.

Így a teljesítmények aránya: $P_1 : P_2 : P_3 = 4 : 3 : 2$. Ez 9 teljesítményegység. Egy egységre tehát 6300 Ft : 9 = 700 Ft esik.
Az 1. munkás tehát $4\cdot 700$ Ft = 2800 Ft-ot kap, a 2. munkás 2100 Ft-ot az utolsó pedig 1400 Ft-ot.

4. Három edényem van. Az edények térfogata rendre 7 liter, 6 liter és 3 liter. A 7 literes edényben 6 liter víz van, a 6 literes edényben pedig 4 liter. A harmadik edény üres. Hogyan tudnánk megfelezni a vizet a három edény felhasználásával?

	7 literes edény	6 literes edény	3 literes edény
Kiindulási állapot	6 ℓ	4 ℓ	üres
1. lépés	3 ℓ	4 ℓ	3 ℓ
2. lépés	3 ℓ	6 ℓ	1 ℓ
3. lépés	7 ℓ	2 ℓ	1 ℓ
4. lépés	5 ℓ	2 ℓ	3 ℓ
5. lépés	5 ℓ	5 ℓ	üres

SZEGŐ GÁBOR MATEMATIKAVERSENY 2010/2011.

AZ I. FORDULÓ FELADATAINAK MEGOLDÁSAI

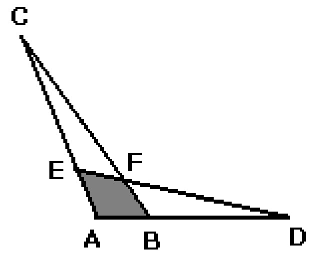
5. Egy 1 m hosszú, 16 mm falvastagságú és 6 cm belső átmérőjű ólomcsövet beolvasztanak, és 3 cm átmérőjű golyókat öntenek belőle. Hány golyót kapnak, ha a folyamat során 5 % a veszteség?

R = (3 + 1,6) cm = 4,6 cm, r = 3 cm, h = 100 cm és r_g = 1,5 cm.
Az ólomcső térfogata: $V_{cs} = R^2\pi h - r^2\pi h = 1216\pi\ cm^3 \approx 3820{,}177\ cm^3$.
Az 5 %-os veszteséget figyelembe véve $V = 1155{,}2\pi\ cm^3 \approx 3629{,}168\ cm^3$.

Egy golyó térfogata: $V_g = \dfrac{4r_g^3\pi}{3} = 4{,}5\pi\ cm^3 \approx 14{,}137\ cm^3$. A golyók száma: $n = \dfrac{V}{V_g} \approx 256{,}7$.

Tehát 256 db golyó készíthető a cső anyagából.

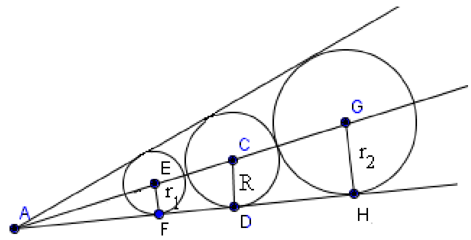
6. Az ábrán látható ABC és ADE háromszögek egybevágóak, AB = AE = 1 és AC = AD = 4. Az ABC háromszög területének hányad része a szürkével jelölt rész területe?



Az AFE∆ területe negyede az AFC∆ területének, mert a magasságuk közös, az alapjaik aránya AE : AC = 1 : 4. Ugyanígy az ABF∆ területe is negyede az ADF∆ területének. Az ABC∆ és az ADE∆ egybevágóságából következik, hogy a AFE és ABF háromszögek területe egyenlő. Így az ABC∆ területe az AFE∆ területének ötszöröse.

Tehát a szürkével jelölt ABFE□ területe $\dfrac{2}{5}$ része az ABC háromszög területének.

7. Egy 60°-os szög szárait egy R = 12 cm sugarú kör érinti. Egy másik, r sugarú kör érinti a szög szárait és a R sugarú kört. Mekkora a r?



Használjuk az ábra jelöléseit!
A feladat feltételeinek két kör tesz eleget.
Az ACD∆ egy szabályos háromszög fele. Így az AC hossza 2R = 24 cm.
Az AEF∆ ~ ACD∆, mert szögeik egyenlők. Ekkor a megfelelő oldalak arány a két háromszögben egyenlő:

$$\frac{R}{24} = \frac{r_1}{24 - R - r_1}.$$

Ebből r_1 = 4 cm.

Hasonlóan határozható meg az r_2 is: $\dfrac{R}{24} = \dfrac{r_2}{24 + R + r_2}$.

Ebből r_2 = 36 cm.

8. Hány olyan 10^{2010}-nél kisebb pozitív egész szám van, amelyek számjegyeinek összege 2?

A 10^{2010} szám 2011 db számjegyből áll. A feltételnek megfelelő számok 2 db 1-es és 0 vagy 1 db 2-es és 0 számjegyekből állhatnak.
Ha a 2-es számjeggyel kezdődik a szám, akkor 2010 lehetőség van: 2; 20; 200; …; $2\cdot 10^{2009}$.
Ha 1-es számjeggyel kezdődik, akkor az alábbi lehetőségek vannak: 11; 110; 101; 1100; 1010; 1001; 11000; 10100; 10010; 10001; …; $11\underbrace{0\ldots0}_{2008\text{ db }0}$; …; $1\underbrace{0\ldots0}_{2008\text{ db }0}1$.

Ha egy ilyen szám k db (0 ≤ k ≤ 2008) 0 számjegyet tartalmaz, akkor k + 1 db, a feltételeknek megfelelő k + 2-jegyű szám képezhető.

Így ezek száma 1 + 2 +3 + … + 2009 = 2009 · 1005 = 2019045.
Tehát összesen 2019045 + 2010 = 2021055 db ilyen szám van.