

SZEGŐ GÁBOR MATEMATIKÁVERSENY 2010/2011.

A II. FORDULÓ FELADATAINAK MEGOLDÁSA

1. Az épülő gyaloghíd egyik cölöpjének az $\frac{1}{4}$ része a földben, a $\frac{2}{5}$ része a vízben van, 5,6 m hosszúságú része pedig kiáll a vízből. Milyen hosszúságú a cölöp?

Jelöljük x -szel a cölöp hosszát!

Ekkor a feladat feltételei alapján: $\frac{1}{4}x + \frac{2}{5}x + 5,6 = x$.

Ebből $x = 16$.

Tehát a cölöp hossza 16 m.

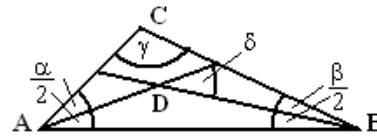
2. Mekkora szöget zár be a háromszög két belső szögfelezője, ha a háromszög harmadik szöge 75° ?

Használjuk az ábra jelöléseit! Ekkor $\gamma = 75^\circ$.

δ az $ABD\Delta$ külső szöge. Így $\delta = \frac{\alpha + \beta}{2}$.

$\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma = 105^\circ$

Tehát a háromszög két belső szögfelezője $\delta = 52,5^\circ$ -os szöget zár be.



3. Egy számsorozat első öt tagja természetes szám. A sorozat bármely tagjából úgy kapjuk meg a következőt, hogy megszorozzuk $\frac{2}{3}$ -dal. Mi lehet a sorozat első öt tagja, ha azokat egymás mellé írva egy tizenkétjegyű számot kapunk?

Jelöljük a sorozat első elemét a -val!

Ekkor a sorozat első öt eleme: a ; $\frac{2}{3}a$; $\left(\frac{2}{3}\right)^2 a$; $\left(\frac{2}{3}\right)^3 a$; $\left(\frac{2}{3}\right)^4 a$.

Az ötödik tag $\left(\frac{2}{3}\right)^4 a = \frac{16}{81}a$ csak úgy lehet természetes szám, ha $a = 81k$, ahol $k \in \mathbf{N}$.

$k = 1$ esetén az öt szám: 81; 54; 36; 24 és 16.

Ez az öt szám egymás mellé írva nem alkot tizenkétjegyű számot.

$k = 2$ esetén az öt szám: 162; 108; 72; 48 és 32.

Ez az öt szám megfelel a feladat feltételeinek.

$k = 3; 4; 5; 6; \dots$ esetén az egymás mellé írt öt szám 12-nél több számjegyből áll.

Így a keresett öt szám: 162; 108; 72; 48 és 32.

4. Egy derékszögű háromszög oldalainak aránya $5 : 12 : 13$. Az átfogóhoz tartozó magassága 10 cm hosszú. Mekkora a háromszög oldalai?

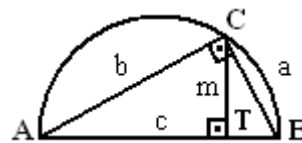
Használjuk az ábra jelöléseit! Ekkor $a : b : c = 5 : 12 : 13$.

Így $a = 5x$, $b = 12x$, $c = 13x$.

Az $ABC\Delta$ területének kétszerese: $2t_{ABC} = ab = mc$.

Helyettesítés után: $5x \cdot 12x = 10 \cdot 13x$. Ebből $x = \frac{13}{6}$.

Tehát a háromszög oldalai: $\frac{65}{6}$ cm, $\frac{156}{6}$ cm és $\frac{169}{6}$ cm.



SZEGŐ GÁBOR MATEMATIKAVERSENY 2010/2011.

A II. FORDULÓ FELADATAINAK MEGOLDÁSA

5. Mekkora annak a $72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességű vonatszerelvénynek a hossza, amelyik egy 1100 m hosszú alagúton 1 perc alatt halad át?

Használjuk az ábra jelöléseit!

$a = 1100 \text{ m}$, a vonat sebessége v .

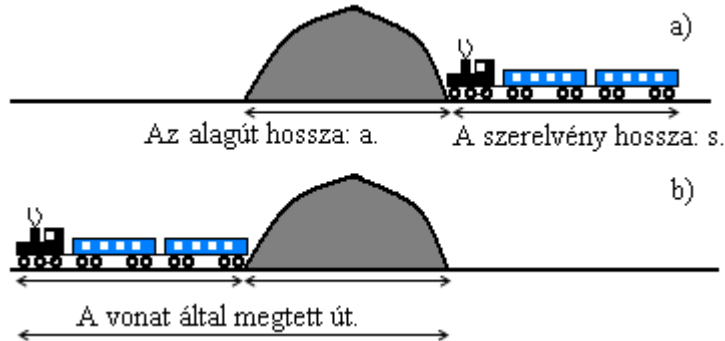
$v = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Az eltelt idő t .

$t = 1 \text{ perc} = 60 \text{ s}$.

A vonat 1 perc alatt $v \cdot t = 1200 \text{ m}$ utat tesz meg.

$1200 \text{ m} = a + s$ Ebből $s = 100 \text{ m}$.

A szerelvény hossza 100 m.



6. Ha egy kétjegyű szám számjegyeit felcseréljük, akkor a szám értéke 75 %-kal növekszik. Melyik ez a szám? Hány megoldás van?

A tízeseket jelöljük a -val, az egyeseket b -vel!

Így a keresett szám: $\overline{ab} = 10a + b$.

A számjegyek felcserélése után: $\overline{ba} = 10b + a$.

A feladat feltételei alapján: $\frac{175}{100}(10a + b) = 10b + a$. Ebből egyszerűsítés után $b = 2a$.

Így az \overline{ab} alakú kétjegyű számok: 12; 24; 36 és 48.

Ezek a számok mind megfelelnek a feladat feltételeinek.

Így a keresett számok: 12; 24; 36 és 48.

7. 1-től 2010-ig szorosan egymás után leírtuk a természetes számokat. Hányszor fordul elő az 5-ös számjegy az így kapott természetes számban?

1 – 99-ig 20 db 5-ös számjegyet kell leírnunk.

1 – 1000-ig 10 db ilyen 100-as csoport van. 500 – 599-ig azonban 100 db olyan szám van, amelyik 5-össel kezdődik.

Így $10 \cdot 20 + 100 = 300$ db 5-ös számjegyet kell leírnunk 1 – 1000-ig.

Hasonlóan 1001 – 2000 –ig újabb 300 db 5-ös számjegyet kell leírni.

2001 – 2010-ig csak 1 db 5-ös számjegyet szerepel.

Tehát a feladatban szereplő természetes számban 601 db 5-ös számjegy fordul elő.

8. Egy téglalap átlójának felezőmerőlegese a hosszabbik oldalt 1 : 2 arányban osztja ketté. Mekkora a két átló által bezárt szög?

Használjuk az ábra jelöléseit!

Az $ACE\Delta$ egyenlő szárú, mert az E csúcsa az AC szakasz felezőmerőlegesének az egyik pontja. Így az AE szakasz hossza is $2x$.

Az AED derékszögű háromszög (egy szabályos háromszög fele)

A csúcsánál lévő szöge 30° .

Az AGE Δ is egyenlő szárú háromszög, amelyben az AF magasság szögfelező is. Így az FAG szög is 30° .

Az α szög az ABF Δ külső szöge.

Így $\alpha = \text{FAG szög} + \text{FBA szög} = 2 \times \text{FAB szög} = 60^\circ$.

