SZEGŐ GÁBOR MATEMATIKAVERSENY 2011/2012.

AZ I. FORDULÓ FELADATAINAK MEGOLDÁSA

1. Egy lécet úgy fűrészeltek ketté, hogy az egyik darab két és félszer akkora lett, mint a másik.

Mekkora volt az egész léc, ha az egyik darab 1 m 20 cm?

A két lécdarab hosszának az aránya 2,5 : 1 = 5 : 2.
Az egyik esetben a rövidebbik lécdarab hossza 1 m 20 cm, akkor ez 2 rész, amiből egy rész 60 cm,
a hosszabbik darab 5 rész, azaz 3 m.
Így a léc hossza 4 m 20 cm = 4,2 m.

A másik esetben a hosszabbik darab az 1 m 20 cm, ami 5 rész.
Így egy rész 24 cm, a kettő rész 48 cm,
a hosszabbik léc 120 cm, az egész léc 1 m 68 cm = 1,68 m. **9 pont**

2. A menzán öt barátnő áll egymás után libasorban. Az alábbiakat tudjuk:

a) **Anna előbb kapta meg az ebédet, mint Boglárka, de később, mint Júlia.**

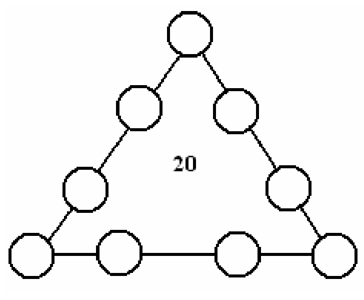
b) **Sára és Júlia nem állt közvetlenül egymás mögött.**

c) **Kati nem állt sem Sára, sem Anna mögött.**

Milyen sorrendben állhattak a barátnők? Hány megoldás van?

Az a) állítás alapján Júlia Anna és Boglárka előtt, Anna pedig Boglárka előtt ebédelt. Hármójuk sorrendje: JAB.
A b) állítás alapján Sára és Júlia nem lehettek közvetlenül egymás mögött.
Így Sára vagy Anna és Boglárka között, vagy Boglárka után ebédelt, azaz vagy JASB, vagy JABS.
Lehet, hogy Sára Júlia előtt ebédelt, ha Júliát Kati is megelőzte: SKJAB.
A c) állítás alapján Kati csak Anna és Sára előtt ebédelhetett, így a SKJAB sorrend nem lehet, csak KJABS vagy KJASB.
Mivel Kati és Júlia sorrendjéről nem tudunk semmit, ezért lehet JKABS vagy JKASB.
Így a lehetséges négy sorrend: KJABS, KJASB, JKABS vagy JKASB. **10 pont**

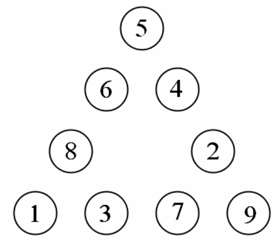
3. A háromszög mentén elhelyezett körökbe írjuk be 1-től 9-ig az egész számokat úgy, hogy a háromszög mindhárom oldala mentén a számok összege 20 legyen!



A feltétel szerint az egy oldal mentén írt számok összege 20. Így a három oldal mentén a számok összege 60. Ebben az összegben azonban minden csúcsba írt szám kétszer szerepel. 1-től 9-ig a számok összege 45. Ahhoz, hogy 60 legyen, még 15 kell.
Így a csúcsokba írt számok összege 15.
Írjuk az egyik csúcsba az 5 számot. A másik két csúcsba négy lehetőség van:
a 4 és a 6, a 3 és a 7, a 2 és a 8, valamint az 1 és a 9.

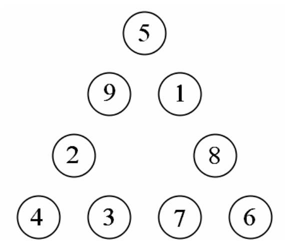
SZEGŐ GÁBOR MATEMATIKAVERSENY 2011/2012.

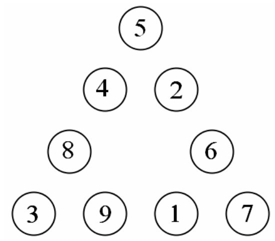
AZ I. FORDULÓ FELADATAINAK MEGOLDÁSA

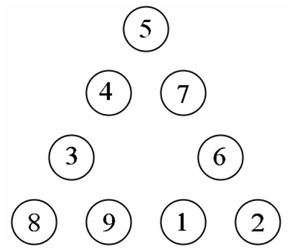


Pl.: A bal oldalra az 1 és az 5 közé 14-et adó összegnek kell kerülni, ami csak a 8 és a 6 összege lehet, a másik oldalon a közbülső számok összegének 6-nak kell lenni, ami a 2 és a 4 összege, az alsó oldalra 3 és a 7 kerül.

Ezek alapján néhány lehetséges megoldás:





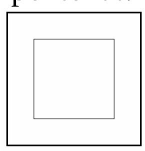


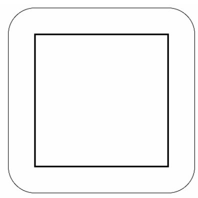
12 pont

4. Adott egy 5 cm oldalhosszúságú négyzet. Rajzold meg azokat a pontokat a négyzet síkjában, amelyek a négyzet határvonalától 1 cm távolságra vannak!

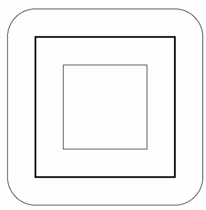
A négyzet síkjában a négyzeten belül és azon kívül is keressünk ilyen pontokat!

Belül az oldal egyenesekkel párhuzamos, azoktól éppen 1 cm távolságra lévő egyenesek metszéspontjai közé eső szakaszok által kijelölt 3 cm oldalú négyzet kerületi pontjai.





A négyzeten kívül az oldal egyenesekkel párhuzamos 5-5 cm hosszú szakaszokból és a csúcsok körül rajzolható 1 cm sugarú negyed körívekből álló zárt görbe vonal pontjai.



A feladat megoldása a fenti két halmaz egyesítése.

13 pont

5. Egy egész szám négyzetéhez hozzáadunk 1-et. Az így kapott számot elosztjuk 3-mal. Milyen maradékot kaphatunk? Válaszodat indokold!

Egy egész szám hárommal osztva 0, 1 vagy 2 maradékot adhat.
Ha a szám 0 maradékot ad, a négyzete is 0 maradékot ad, és ehhez 1-et adva olyan számot kapunk, amelyik hárommal osztva 1 maradékot ad.
Ha a szám 3-mal osztva 1 maradékot ad, akkor $3k + 1$ alakú. Ekkor a négyzete $9k^2 + 6k + 1$, és ehhez 1-et adva olyan számot kapunk, amelyik hárommal osztva 2 maradékot ad. ($9k^2 + 6k + 1$, ahol az első két tag osztható 3-mal, így a maradékot a harmadik tag határozza meg, ennek 3-mal való osztási maradéka 1.)
Ha a szám 3-mal osztva 2 maradékot ad, akkor $3k + 2$ alakú. Ekkor a négyzete $9k^2 + 12k + 4$, és ehhez 1-et adva olyan számot kapunk, amelyik hárommal osztva 2

maradékot ad. ($9k^2 + 12k + 4$, ahol az első két tag osztható 3-mal, így a maradékot a harmadik tag határozza meg, ennek 3-mal való osztási maradéka 1.)
Így a maradék 1 illetve 2 lehet. **14 pont**

6. 0 °C-os vizet kezdünk el melegíteni. A víz hőmérsékletének növekedése percenként 3,5 °C. Hány °C-os lesz a víz 0 perc, 1 perc, 6 perc, 18 perc és 36 perc elteltével? Határozd meg a hőmérséklet-növekedés és az eltelt idő közötti összefüggés szabályát! Ábrázold grafikonon az összetartozó értékpárokat!

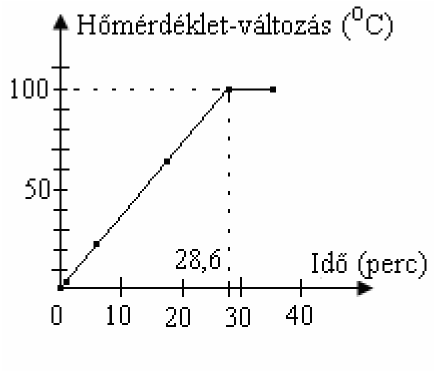
A víz hőmérsékletének növekedése egyenesen arányos a melegítés időtartamával mindaddig, amíg a hőmérséklete el nem éri a 100°C-ot.
A kezdeti hőmérséklet 0°C, így a változás éppen a víz hőmérsékletével egyenlő.
Foglaljuk táblázatba a hőmérséklet-változást az idő függvényében!

idő (perc)	0	1	6	18	36
ΔT (°C)	0	3,5	21	63	100

A víz hőmérséklete $\frac{100}{3,5} \approx 28,6$ perc elteltével eléri a 100°C-ot, így utána nem változik a hőmérséklet.

Az összetartozó értékpárok a táblázat adatai alapján egy koordinátarendszerben ábrázolva: ábra $\rightarrow$ $\rightarrow$
A hőmérséklet-változás az idő függvényében:

$$\Delta T\,(t) = \begin{cases} 3,5t, \text{ ha } t \le \dfrac{100}{3,5} \\ 100, \text{ ha } \dfrac{100}{3,5} < t \end{cases}$$



15 pont

7. Egy természetes számhoz hozzáadva számjegyeinek összegét 2011-et kapunk. Melyik ez a természetes szám?

A keresett természetes szám négyjegyű, mert a számjegyek lehetséges maximális összegét levonva a 2011-ből a kapott szám négyjegyű, a keresett szám ennél kisebb nem lehet: $2011 - 4\cdot 9 = 1975$.
A keresett négyjegyű szám felírható $1000a+100b+10c+d$ alakban, ahol a, b, c és d a tízes számrendszer számjegyei: 0, 1, …, 9 ($a \neq 0$).
Ha ehhez hozzáadjuk a számjegyeket, akkor $1001a+101b+11c+2d = 2011$ a feltétel szerint.
Ha az $a = 2$, akkor $2002+101b+11c+2d = 2011$, amiből $101b+11c+2d = 9$.
A b és c 0-nál nagyobb nem lehet, ekkor a $d = 4,5$, de ez nem számjegy, így ez nem lehet megoldás.
Ha az $a = 1$ esetén $1001+101b+11c+2d = 2011$, amiből $101b+11c+2d = 1010$.
A $b = 10$ értékre az egyenlet teljesül $c = 0$ és $d = 0$ mellett, de a 10 nem számjegy.
A $b = 9$ esetén $909+11c+2d = 1010$, amiből $11c+2d = 101$.
Ha $c = 9$, akkor $99+2d = 101$, amiből $2d = 2$, így $d = 1$.

Ha c = 8, akkor 88+2d = 101, amiből 2d = 13, ekkor a d = 6,5, ami nem számjegy.
A c ennél kisebb nem lehet, mert d értéke nem számjegy lesz.
A b = 8 esetén 808+11c+2d = 1010, amiből 11c+2d = 202. Ebből c és d számjegyekkel nem lesz megoldás.
A keresett szám jegyei: a = 1, b = 9, c = 9 és d = 1. Így a keresett szám: 1991. **15 pont**

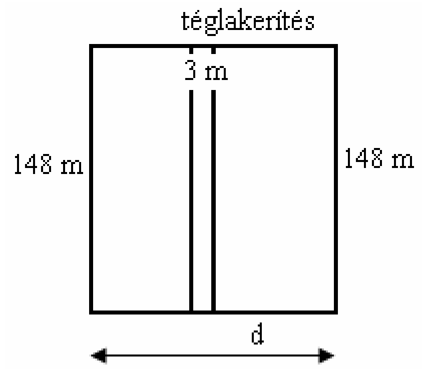
8. Egy téglalap alakú gyümölcsöskert eleje téglakerítés, amelyen egy 3 m szélességű kapu van. A kaputól egy ugyanilyen szélességű, 148 m hosszú egyenes út vezet a hátsó kerítésig. A kert másik három oldalán a drótkerítés hosszúsága összesen 392 m.

a) **Milyen hosszú a téglafal?**

b) **Mekkora a gyümölcsös egész területe?**

c) **Hány ár a megművelt terület?**

A hátsó kerítésig vezető út párhuzamos az oldalkerítéssel. Így az oldalkerítés hossza is éppen 148 m.
A 392 m hosszú drótkerítés két 148 m-es és egy nem ismert hosszúságú (d) oldalból áll. Ebből az ismeretlen oldal hossza:
d = (392 - 2·148) m = 96 m.
A téglafal és a 3m széles kapu együtt éppen 96 m, amiből a téglakerítés hossza 93 m.



A téglalap alakú telek oldalainak hossza a fentiek alapján 148 m és 96 m. Ebből a kert területe: $t_k = (148\ m) \times (96\ m) = 14208\ m^2$.
A megművelt területet úgy kapjuk meg, hogy a kert területéből kivonjuk az út területét. Így a művelt terület: $t_m = 14208\ m^2 - (148\ m) \times (3\ m) = 13764\ m^2$.
A terület mértékegységei között 1 ár = 100 m^2 összefüggés alapján a kert megművelt területe $t_m = 13764\ m^2 = 137,64$ ár. **12 pont**

Mindösszesen: 100 pont