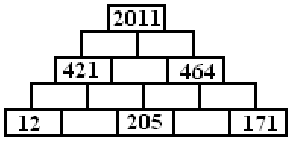
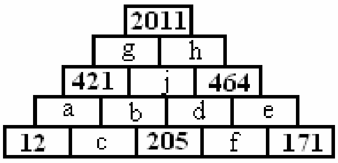
SZEGŐ GÁBOR MATEMATIKAVERSENY 2011/2012.

A II. FORDULÓ FELADATAINAK MEGOLDÁSA



1. A számpiramis minden téglájában az alatta levő két szám összege áll. Milyen számok kerüljenek az üres téglákba?



Használjuk az ábra jelöléseit!
Ekkor $12 + c = a$; $205 + c = b$ és $a + b = 421$. Ebből $2c + 217 = 421$. Tehát $c = 102$, $a = 114$ és $b = 307$.
Hasonlóan: $205 + f = d$; $171 + f = e$ és $d + e = 464$.
Így $2f + 376 = 464$. Tehát $f = 44$, $d = 249$ és $e = 215$.
A $j = b + d = 556$, $g = j + 421 = 977$ és $h = j + 464 = 1020$.
Mivel $g + h = 1997 \neq 2011$, így a feladatnak nincs megoldása. **Σ: 13 pont**

2. Egy régi Magyarország-térképen nem látható a méretarány (lépték). Hogyan tudnánk meghatározni ezt a léptéket? Tudjuk, hogy Szolnok és Budapest távolsága a valóságban 100 km, a térképen pedig 8 cm. Mekkora Békéscsaba és Salgótarján távolsága a valóságban, ha a térképen 19,2 cm?

Mivel 100 km = 10^5 m, a 8 cm = $8\cdot10^{-2}$ m.
Így a hasonlóság aránya (a méretarány): $\lambda = 10^5 : 8\cdot10^{-2} = 1250000$.
Ebből Békéscsaba és Salgótarján távolsága: $d = \lambda\cdot 19{,}2$ cm =
= $1250000\cdot19{,}2$ cm = 24000000 cm = 240 km. **Σ: 9 pont**

3. Egy téglatest egyik éle 3 cm, a másik 4 cm, a felszíne 1,08 dm². Hány köbdeciméter a téglatest térfogata?

Jelölje a téglatest oldalait a, b és c. Így a = 3 cm és b = 4 cm.
A téglatest felszíne: $A = 2(ab + ac + bc) = 1{,}08\ \text{dm}^2 = 108\ \text{cm}^2$.
Ebből $ac + bc = (a + b)c = 42$. $a + b = 7$ felhasználásával $c = 6$ cm.
A téglatest térfogata: $V = abc = 3\cdot4\cdot6\ \text{cm}^3 = 0{,}072\ \text{dm}^3$. **Σ: 10 pont**

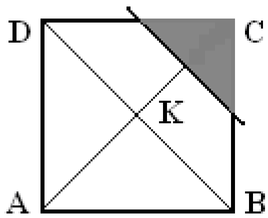
4. A cukorrépa 18 %-a cukor. Hány kilogramm cukor van 2,4 t cukorrépában? Hány mázsa répából lehet előállítani 540 kg cukrot?

2,4 t = 2400 kg.
2400 kg répa 18%-a cukor: $2400\cdot0{,}18 = 432$ kg.
Az 540 kg cukrot x kg cukorrépából lehet előállítani.
Így $0{,}18x = 540$. Ebből $x = 3000$ kg = 30 q.
Tehát 2,4 t répában 432 kg cukor van, és 540 kg cukrot 30 q répából lehet előállítani. **Σ: 10 pont**

5. Rajzoljunk egy 5 cm oldalhosszúságú négyzetet! Színezzük kékre azon pontok halmazát a négyzetlapon, amelyek valamely csúcshoz közelebb vannak, mint a középponthoz!

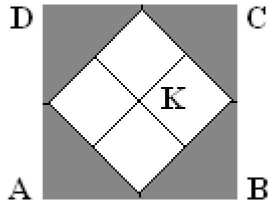
A szakaszfelező merőleges azon pontok halmaza a síkban, amelyek a szakasz két végpontjától azonos távolságra vannak.
Az AB szakasz felezőmerőlegese a síkot 3 diszjunkt (különálló) halmazra bontja: az A pontot tartalmazó nyílt félsík pontjai A-hoz közelebb vannak, mint B-hez. A szakaszfelező merőleges pontjai A-tól és B-től azonos távolságra vannak. A B pontot tartalmazó nyílt félsík pontjai B-hez közelebb vannak, mint A-hoz.

Ezt a tulajdonságot felhasználva a C csúcshoz közelebb lévő pontok halmaza a négyzetlapon a KC szakasz felezőmerőlegese által a négyzetlapból levágott C csúcsú derékszögű háromszög. (Az ábrán a szürkére festett háromszög.)
A szakaszfelező merőleges pontjai nem tartoznak a halmazba.



SZEGŐ GÁBOR MATEMATIKAVERSENY 2011/2012.

A II. FORDULÓ FELADATAINAK MEGOLDÁSA



A mellékelt ábra a feladat megoldását szemlélteti.
A szakaszfelező merőleges pontjai nem tartoznak a megoldáshalmazba.
Tehát a négyzet oldalfelező pontjai nincsenek szürkére festve.

Σ: 13 pont

6. Melyik az a négyjegyű szám, amelyet 9-cel megszorozva olyan számot kapunk, amelynek a számjegyei azonosak a keresett szám számjegyeivel, csak fordított sorrendben?

A feladat feltételei alapján a keresett szám kilencszerese is négyjegyű szám. Így a keresett szám nem lehet nagyobb 1111-nél, mert a $9 \cdot 1112 = 10008$ már nem négyjegyű szám.

A szám nem lehet $\overline{11ab} = 1100 + 10a + b$ alakú sem, mert a $9 \cdot \overline{11ab} = 9900 + 90a + 9b$ szám 9-essel kezdődik, és akkor b-nek is 9-esnek kell lennie (a fordított sorrend miatt). Ekkor már csak az $a = 0$ lehet jó. Az 1109 azonban nem felel meg ($9 \cdot 1109 = 9981$).

Így a $\overline{10ab} = 1000 + 10a + b$ alakú számok között kell keresnünk a megoldást.

A $9 \cdot \overline{10ab} = 9000 + 90a + 9b$ alakból látható, hogy $b = 9$, és
9b maradékának a 9a összegével 0-ra kell végződnie. Így $a = 8$.
A keresett szám: 1089. Ez tényleg megfelel a feltételeknek: $9 \cdot 1089 = 9801$.

Σ: 14 pont

7. Hat üres bögre áll az asztalon. Mind a hatot meg kell fordítani az alábbi szabály szerint: minden lépésben pontosan öt bögrét lehet ellenkező helyzetbe fordítani. Hogyan lehet ezt elérni?

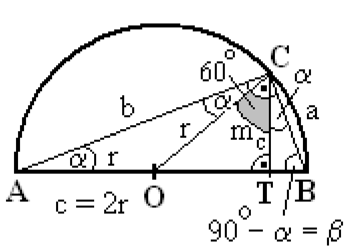
A bögrék állását szemléltessük nyilakkal: ↑ és ↓ Így a kiindulási állapot jele: ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑

1.	↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↑	Az utolsó nyilat nem fordítottuk meg.
2.	↓ ↑ ↑ ↑ ↑ ↓	Az 1. nyilat nem fordítjuk meg.
3.	↑ ↑ ↓ ↓ ↓ ↑	A 2. nyilat nem fordítjuk meg.
4.	↓ ↓ ↓ ↑ ↑ ↓	A 3. nyilat nem fordítjuk meg.
5.	↑ ↑ ↑ ↑ ↓ ↑	A 4. nyilat nem fordítjuk meg.
6.	↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓	A 5. nyilat nem fordítjuk meg.

Ezzel a feladatot megoldottuk.

Σ: 15 pont

8. Egy derékszögű háromszögben az oldalak hosszának szorzata 4-szer akkora, mint a magasságok hosszának szorzata. Mekkorák a háromszög szögei?



Használjuk az ábra jelöléseit!
A feltétel szerint $abc = 4m_am_bm_c = 4bam_c$.
Ebből $c = 2r = 4m_c$. Tehát $m_c = 0{,}5r$. A COT derékszögű háromszög a szabályos háromszög fele, így a C csúcsánál lévő szöge 60°.
Az ACO∆ A és C csúcsánál α szög van, mert egyenlő szárú.
A BCT derékszögű háromszög C csúcsánál is α szög van.
Ezek alapján $\alpha + 60° + \alpha = 90°$. Tehát $\alpha = 15°$ és $\beta = 90° - \alpha = 75°$.
A háromszög szögeinek a nagysága: 15°, 75° és 90°.

Σ: 16 pont

Mindösszesen: 100 pont