SZEGŐ GÁBOR MATEMATIKAVERSENY 2013/2014.

AZ I. FORDULÓ FELADATAINAK MEGOLDÁSAI

1. Egy matematikus egyenletesen halad az autójával az országúton. Amikor távolabb megpillant egy sebességkorlátozó táblát, az alábbiakra gondol:

- **Ha a tábla után is az eredeti sebességemmel haladok tovább, akkor a megengedett sebességet a harmadával fogom túllépni.**
- **Ha a sebességemet 10 km/h-val növelném, akkor 50%-os lenne a sebesség-túllépésem.**

Mekkora sebességgel haladt a matematikus autója, és milyen számot látott a sebességkorlátozó táblán?

Jelölje x a sebességkorlátozó táblán lévő számot.

Ekkor a matematikus sebessége $\frac{4}{3}x$.

A sebesség növelése után $\frac{4}{3}x + 10$ a matematikus sebessége.

A feltételek szerint: $\frac{4}{3}x + 10 = 1{,}5x$.

Ebből x = 60. A kocsi sebessége pedig $\frac{4}{3}x = 80$.

Tehát a matematikus kocsijának sebessége 80 km/h és a sebességkorlátozó táblán a 60-as szám látható.

2. Írj a következő tízes számrendszerben felírt hatjegyű számban az x és az y helyére olyan számjegyet, hogy a szám osztható legyen 24-gyel! $\overline{53x56y}$

$24 = 3\cdot 8$, ahol a 3 és a 8 relatív prímek. Így a keresett szám akkor osztható 24-gyel, ha 3-mal és 8-cal is osztható.
A 8-cal való oszthatóság feltétele, hogy a szám utolsó három számjegyéből képzett háromjegyű szám osztható 8-cal. Tehát y lehetséges értékei 0 és 8.
Ha y = 0, akkor a 3-mal való oszthatóság feltételéből (a szám számjegyeinek az összege osztható 3-mal) x = 2; 5 vagy 8 lehet.
Ha y = 8, akkor x = 0; 3; 6 vagy 9 lehet.

3. Egy 20 cm sugarú körlapból a lehető legnagyobb oldalú négyzetet vágjuk ki. Mennyi ennek a négyzetnek a kerülete és a területe?

Jelöljük a-val a négyzet oldalait és d-vel az átlóit. A Pitagorasz-tétel alapján $d = a\sqrt{2}$. Így a négyzet oldala akkor a legnagyobb, ha az átlója is a lehető legnagyobb. A körben a leghosszabb húr az átmérő. Tehát d = 2r = 40 cm. Ebből $a = d : \sqrt{2} = 20\sqrt{2} \approx 28{,}28$ cm.
Így a négyzet kerülete: $k = 4a = 80\sqrt{2} \approx 113{,}14$ cm. A négyzet területe: $t = a^2 = 800\ \text{cm}^2$.

4. Bontsd fel két háromjegyű szám szorzatára a 666666-ot!

Bontsuk prímtényezőire a 666666-ot. $666666 = 2\cdot 3^2\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37$
Mivel 666666 **:** 999 = 667,33, ezért a keresett számok 668 és 998 közé esnek. Így a lehetséges felbontások: $693\cdot 962$; $777\cdot 858$ és a $814\cdot 819$.

SZEGŐ GÁBOR MATEMATIKAVERSENY 2013/2014.

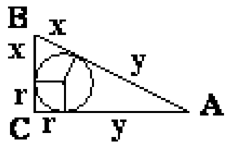
AZ I. FORDULÓ FELADATAINAK MEGOLDÁSAI

5. Egy dobozban 10 cédula van 0-tól 9-ig megszámozva. A dobozból véletlenszerűen húzunk ki 4 lapot. Az egyes húzások után a cédulán lévő számot a húzás sorrendjében leírjuk, majd a cédulát visszatesszük a dobozba. Hány esetben kapunk olyan négyjegyű számot, amelyben a legkisebb számjegy a 6?

Mivel a számokat a kihúzás sorrendjében írjuk fel, ezért számít a kihúzott számok sorrendje. Mivel minden húzás után visszatesszük a cédulákat, így minden számjegy többször is szerepelhet a kihúzottak között. A feltételeknek megfelelő számok esetén a 6-os, 7-es, 8-as és a 9-es számjegy közül a 6-os számjegy legalább egyszer szerepel. Tehát a 6-os vagy az annál nagyobb számjegyeket tartalmazó számok számából ki kell vonni a 6-os számjegyet nem tartalmazó számok számát.
A 6-os vagy az annál nagyobb számjegyet tartalmazó számok száma: $4\cdot4\cdot4\cdot4 = 4^4 = 256$.
(Mind a négy húzás esetén 4 számból választhatunk.)
A 6-os számjegyet nem tartalmazó számok száma: $3\cdot3\cdot3\cdot3 = 3^4 = 81$. (Mind a négy húzás esetén 3 számból választhatunk.)
$256 - 81 = 175$ olyan számot húzhatunk ki, amelyben a legkisebb számjegy a 6.

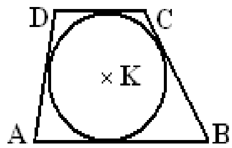
6. Bizonyítsd be, hogy a derékszögű háromszög kerülete a beírt kör sugarának és az átfogó együttes hosszának kétszerese!

Használjuk az ábra jelöléseit.
A szimmetria miatt a háromszög csúcsaitól az érintési pontokig terjedő szakaszok egyenlő hosszúságúak.

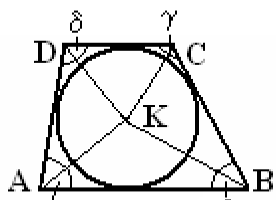


Ekkor a háromszög oldalait a szokásos módon jelölve: $a = x + r$; $b = y + r$; $c = x + y$.
Így a háromszög kerülete: $k = a + b + c = 2(r + x + y) = 2(r + c)$.
Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

7. Az ábrán látható ABCD trapézba olyan K középpontú kört írtunk, amely érinti a trapéz oldalait. Bizonyítsd be, hogy az AKD szög = BKC szög! Add meg az AKD szög nagyságát!



Használjuk az ábra jelöléseit.



Tanultuk, hogy a trapéz szárain lévő szögek összege 180°.
Így $\alpha + \delta = \gamma + \beta = 180°$.
A trapézba írható kör középpontját a csúcsokkal összekötő szakaszok felezik a trapéz szögeit, mert a beírható kör középpontja a szögfelezők metszéspontja.
Így az AKDΔ-ben $\frac{\alpha + \delta}{2} = 90^\circ$.
Használjuk fel, hogy a háromszög belső szögeinek összege 180°.
Ezek alapján az AKD szög 90°.
Hasonló gondolatmenet alapján BKC szög is 90-os°.
Ezzel a feladatot megoldottuk.

8. Mennyi az alábbi törtek összege? $\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\dots+\frac{1}{2013\cdot2014}=$

Vegyük észre, hogy $\frac{1}{2\cdot3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}; \frac{1}{3\cdot4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}; \dots \frac{1}{2013\cdot2014}=\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}$.

Így $\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\dots+\frac{1}{2013\cdot2014} = \frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2014}=\frac{503}{1007}$.