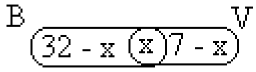
SZEGŐ GÁBOR MATEMATIKAVERSENY 2013/2014.

A II. FORDULÓ FELADATAINAK MEGOLDÁSA

1. Egy természetjáró kör tagjai közül harmincketten jártak már a Bükkben, heten pedig a Vértesben. Három fő egyik helyen sem járt. Hány személy járhatott mindkét helyen?

Jelöljük a Bükkben járók halmazát B-vel, a Vértesben járókét V-vel!
Ekkor $|B| = 32$, $|V| = 7$ és $|B \cap V| = x$. Az ábra alapján két feltételt írhatunk fel: $x \geq 0$ és $7 - x \geq 0$. Ebből $0 \leq x \leq 7$.
Tehát a feladatnak több megoldása is van. A mindkét helyen járók száma 0-tól 7-ig bármelyik egész szám lehet.

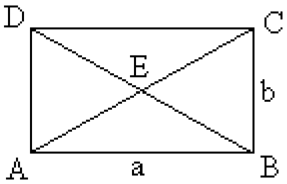


2. Egy vastag könyv oldalainak számozásához a nyomdász 2013 számjegyet használt fel. Hány számozott oldala van a kötetnek, ha a számozása 4-gyel kezdődik?

Az egyjegyű számot tartalmazó oldalakon 6, a kétjegyű számot tartalmazó oldalakon 180 számjegyet használunk fel. Ez a 186 számjegy 96 oldal számozására elegendő.
A háromjegyűekre $2013 - 186 = 1827$ számjegy jut. Ez $1827 : 3 = 609$ oldal számozásához elegendő. Így a könyv $96 + 609 = 705$ számozott oldalt tartalmaz.

3. Az ABCD téglalap középpontja E. Az ABE és BCE háromszögek közül melyiknek nagyobb a területe?

Használjuk az ábra jelöléseit!



Az ABCΔ területe: $t_{ABC} = \frac{ab}{2}$. Az ABEΔ alapja *a* és a hozzá tartozó magasság $\frac{b}{2}$. Így a területe: $t_{ABE} = \frac{ab}{4}$. Ez az ABCΔ területének a fele. Mivel az ABCΔ-et a BE szakasz az ABEΔ-re és a BCEΔ-re bontja, ezért a BCEΔ területe is fele az ABCΔ területének.
Tehát a két háromszög területe egyenlő.

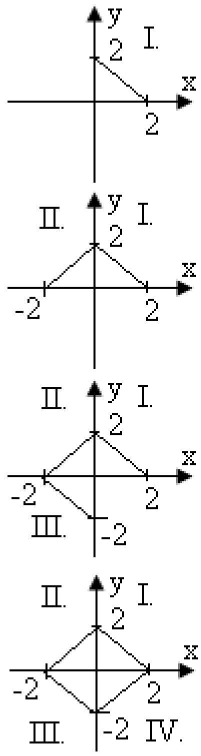
4. Egy matematikusnak fehér és piros dobókockái vannak. A kockákat dobozokban tartja. Néhány dobozban fehér kockák vannak, a többiben pirosak. Az egyes dobozokban a kockák száma 7, 12, 15, 19, 28 és 32. Miután az egyik dobozt a barátjának adta, azt vette észre, hogy a fehér kockákból kétszer annyi maradt, mint a pirosakból. Melyik dobozt ajándékozta el a matematikus?

Ha a fehér kockák száma kétszer annyi, mint a piros kockáké, akkor az összes kockák száma osztható 3-mal. A 3-mal való oszthatóságot vizsgálva 0 maradékot ad a 12 és a 15, 1 maradékot ad a 7, a 19 és a 28, a 32 pedig 2 maradékot ad.
A maradékok összege: $0 + 0 + 1 + 1 + 1 + 2 = 5$. A megmaradt kockák száma akkor lesz osztható 3-mal, ha a maradékok összege is osztható lesz 3-mal. Így a maradékok összegét 2-vel kell csökkenteni. Tehát a 32 kockát tartalmazó dobozt ajándékozta el a matematikus.
Ez megoldása is a feladatnak, mert $12 + 15 = 27$ és $7 + 19 + 28 = 54 = 2 \cdot 27$.

SZEGŐ GÁBOR MATEMATIKAVERSENY 2013/2014.

A II. FORDULÓ FELADATAINAK MEGOLDÁSA

5. A derékszögű koordinátarendszerben rajzoljuk meg azokat a pontokat, amelyek az x és y tengelytől mért távolságának összege 2 cm!



Az x-y derékszögű koordinátarendszerben a $P(p_1;p_2)$ pont távolsága a tengelyektől $|p_2|$ és $|p_1|$.
Így olyan x és y koordinátájú pontokat keresünk, amelyekre $|x| + |y| = 2$.
Bontsuk fel az abszolút értéket!
Az I. síknegyedben: $0 \le x$ és $0 \le y$.
Ekkor az abszolút érték definícióját felhasználva: $|x| + |y| = x + y = 2$.
Ebből az $y = -x + 2$ egyenest kapjuk.
A II. síknegyedben: $0 > x$ és $0 \le y$.
$|x| + |y| = -x + y = 2$. Ebből az $y = x + 2$ egyenest kapjuk.
A III. síknegyedben: $0 > x$ és $0 > y$.
$|x| + |y| = -x - y = 2$. Ebből az $y = -x - 2$ egyenest kapjuk.
A IV. síknegyedben: $0 \le x$ és $0 > y$.
$|x| + |y| = x - y = 2$. Ebből az $y = x - 2$ egyenest kapjuk.
A keresett pontok egy olyan négyzetet határoznak meg, amelynek 4 cm hosszúságúak az átlói. (A legalsó ábra.)

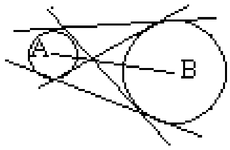
6. Egy négyjegyű számot megszorozva néggyel olyan számot kapunk, amely ugyanazokból a számjegyekből áll, mint az eredeti szám, de fordított sorrendben. Melyik ez a négyjegyű szám?

A keresett számot jelöljük $\overline{abcd}$-vel, ahol a, b, c és d számjegyek és $a \neq 0$, $d \neq 0$.
A feltétel szerint $4\overline{abcd} = \overline{dcba}$.
Mivel a keresett szám négyszerese is négyjegyű szám, ezért *a* lehetséges értékei az 1 és a 2.
1 azonban nem lehet, mert a szám négyszerese 1-re végződne, amely páratlan számot eredményezne. Így $a = 2$ és $d = 4a = 8$, vagy ha van átvitel, akkor $d = 9$. 1-nél több átvitel nem lehet, mert akkor már nem négyjegyű lenne a szám.
Ezek után felírhatjuk a következő egyenleteket:
$d = 9$ esetén
$4\cdot(2000 + 100b + 10c + 9) = 9000 + 100c + 10b + 2$.
Ebből rendezés és egyszerűsítés után $65b - 10c = 5\cdot(13b - 2c) = 161$.
Ez nem lehetséges, mert 161 nem osztható 5-tel.
$d = 8$ esetén
$4\cdot(2000 + 100b + 10c + 8) = 8000 + 100c + 10b + 2$.
Ebből rendezés és egyszerűsítés után $13b = 2c - 1$.
Mivel c számjegy, így $2c - 1 < 18$. Tehát $13b = 2c - 1 < 18$.
Vagyis b csak 1 lehet, c pedig 7.
$\overline{abcd} = 2178$, $4\cdot\overline{abcd} = 8712 = \overline{dcba}$
Így a keresett szám 2187.

SZEGŐ GÁBOR MATEMATIKAVERSENY 2013/2014.

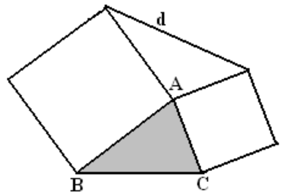
A II. FORDULÓ FELADATAINAK MEGOLDÁSA

7. Adott az AB szakasz, amely 5 cm hosszúságú. Add meg azokat az egyeneseket a síkon, amelyek A-tól 1 cm és B-től 2 cm távolságra vannak!



Az A ponttól 1 cm távolságra lévő egyenesek az A középpontú, 1 cm sugarú kör érintői.
Hasonlóan a B ponttól 2 cm távolságra lévő egyenesek a B középpontú, 2 cm sugarú kör érintői. Így a feladat feltételeinek megfelelő egyenesek a két kör közös érintői.
A feltételeknek tehát az ábrán látható 4 egyenes felel meg.

8. Egy hegyesszögű háromszög két oldalára kifelé négyzeteket rajzolunk. A két négyzet egy-egy csúcsát az ábrán látható módon összekötjük. A kapott szakasz hosszát d-vel jelöljük. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög A csúcsából induló súlyvonala $\frac{d}{2}$!



Használjuk az ábra jelöléseit!
Egészítsük ki az ABCΔ-et ABGC paralelogrammává!
A paralelogramma átlói felezve metszik egymást. Tehát az ABCΔ-ben az AF szakasz súlyvonal, és fele az AG szakasznak.
Az ABCΔ-ben és az ADEΔ-ben az A csúcsánál lévő két szög összege 180°, mert a négyzet szögei 90°-osak.
Tanultuk, hogy a paralelogramma egyik oldalán lévő két szög összege is 180°. Továbbá a paralelogramma szemközti oldalai egyenlők.
Így az ADEΔ egybevágó az ACGΔ-gel, mert két-két oldal és az általuk közbezárt szög a két háromszögben egyenlő.
Tehát az AG = d és AF = $\frac{d}{2}$.
Ezzel az állítást bebizonyítottuk.