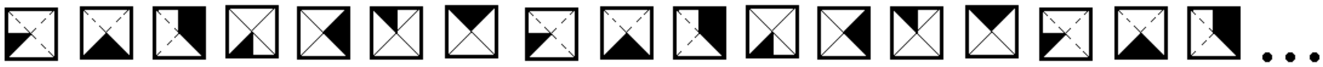
SZEGŐ GÁBOR MATEMATIKAVERSENY 2015/2016.

AZ I. FORDULÓ FELADATAINAK MEGOLDÁSA

1. Egy speciális matematika tantervű osztályban négyszer annyi fiú van, mint lány. Ha 3 lány és 3 fiú nem jön iskolába, akkor a fiúk száma hétszerese a lányokénak. Mennyi az osztálylétszám?

Jelöljük a lányok számát x-szel. Ekkor a fiúk száma 4x, az osztálylétszám 5x.
A feladat feltételei szerint: $7(x - 3) = 4x - 3$.
Ebből $x = 6$. Így az osztálylétszám 30, amely megfelel a feladat feltételeinek.

2. 2015 db 4 cm oldalú négyzetet az ábrán látható szabály szerint feketére festettünk.



Összesen hány cm^2 a feketére festett részek területe?

A feketére festett részek területe rendre 2 cm^2, 4 cm^2, 6 cm^2, 2 cm^2, 4 cm^2, 2 cm^2, 4 cm^2 és ez ismétlődik.
Egy ilyen 7 elemből álló ciklusban a feketére festett részek területének összege 24 cm^2.
Mivel $2015 = 287\cdot 7 + 6$, és az első 6 négyzet feketére festett részeinek területe összesen 20 cm^2, ezért összesen $287\cdot 24 + 20 = 6908$ cm^2 a feketére festett részek területe.

3. Egy urnában 20 piros és 12 fekete golyó van. Egyesével véletlenszerűen húzunk az urnából. Legrosszabb esetben hány golyót kell kihúzni az urnából, hogy az utolsó két egymást követő húzás biztosan piros legyen?

Legyen az első húzás piros, a második fekete, a harmadik piros, a negyedik fekete és így tovább, míg el nem fogynak a fekete golyók. Ekkor eddig felváltva 24 golyót húztunk ki, és az utolsó kihúzott golyó fekete. Mivel a fekete golyók elfogytak, a következő két húzás már csak piros lehet. Tehát a legrosszabb esetben 26 golyót kell kihúzni, hogy az utolsó két egymást követő húzás biztosan piros legyen.

4. Egy téglatest alapjának kerülete 126 cm. Két alapélének aránya 3 : 4-hez. A test magassága a rövidebbik alapél 5/3-ad része. Mekkora a téglatest felszíne és térfogata?

Jelölje a téglatest alapéleit a és b, a magasságát pedig c.
Ekkor a feltételek szerint $a = 3x$, $b = 4x$ és $c = 5a/3 = 5x$.
A téglatest alapjának kerülete: $126 = 2a + 2b = 2(3x + 4x) = 14x$. Ebből $x = 9$ cm.
Tehát a téglatest oldalai: $a = 27$ cm, $b = 36$ cm és $c =45$ cm.
Így a téglatest felszíne: $A = 2(ab + ac + bc) = 7614$ cm^2, térfogata: $V = abc = 43740$ cm^3.

5. Két szám közül az egyik 5-tel osztva 2, a másik pedig 4 maradékot ad. Mennyi lehet a maradék, ha a két szám összegét 10-zel elosztjuk?

Jelöljük a két számot a-val és b-vel.
A feltételek szerint $a = 5k + 2$ és $b = 5n + 4$.
A két szám összege $a + b = 5k + 5n + 6 = 5(k + n) + 6$.
Ha $k + n$ páros, akkor $5(k + n)$ osztható 10-zel, és így $a + b$ 10-zel osztva 6 maradékot ad.
Ha $k + n$ páratlan, akkor $5(k + n)$ 10-zel osztva 5 maradékot ad, és ekkor $a + b$ 10-es maradéka 1 ($a + b = 10m + 5 + 6 = 10m + 10 + 1 = 10(m + 1) + 1$).

SZEGŐ GÁBOR MATEMATIKAVERSENY 2015/2016.

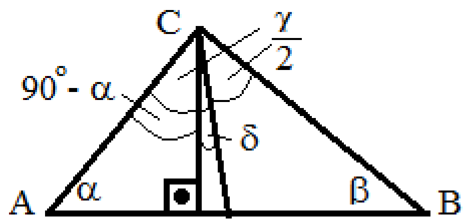
AZ I. FORDULÓ FELADATAINAK MEGOLDÁSA

6. Egy háromszög szögei a szokásos jelölésekkel: α = 74°36’ és β = 52°18’.

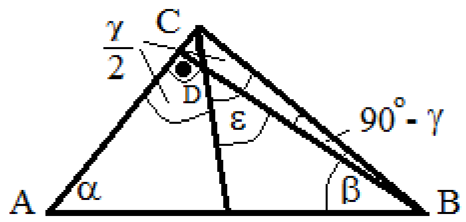
a) Mekkora szöget zár be a C csúcsból induló magasságvonal és a szögfelező?

b) Mekkora szöget zár be a C-ből induló szögfelező a B-ből induló magasságvonallal?

a) Használjuk az ábra jelöléseit!
$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 53°6'$,
$90° - \alpha = 15°24'$
A C csúcsból induló magasságvonal és szögfelező szöge:
$\delta = \gamma/2 - (90° - \alpha) = 26°33' - 15°24' = 11°9'$.



b) Használjuk az ábra jelöléseit!
$90° - \gamma = 36°54'$
A C-ből induló szögfelező és a B-ből induló magasságvonal szöge ε.
ε a BCDΔ külső szöge.
$\varepsilon = 90° - \gamma + \gamma/2 = 36°54' + 26°33' = 63°27'$.



7. Az 1 + 2 + 3 + … + 184 + 185 + 186 összegben akármennyi szám előjelét megváltoztathatjuk.

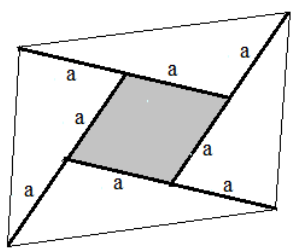
a) El lehet-e érni, hogy a kapott összeg 2016 legyen?

A feladatban szereplő egyik szám az idei tanévben kapcsolódik a Verseghy Ferenc Gimnáziumhoz.

b) Melyik ez a szám és mi a kapcsolat?

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + 184 + 185 + 186 = 186 \cdot (186 + 1)/2 = 93 \cdot 187$. Két páratlan szám szorzata mindig páratlan. Ha a fenti összegben bármelyik számnak az előjelét megváltoztatjuk, akkor az összeg értékét a szám kétszeresével csökkentjük. Egy szám kétszerese pedig minden esetben páros szám lesz. Egy páratlan és egy páros szám különbsége mindig páratlan szám marad.
Így akármennyi szám előjelét megváltoztatva az összeg értéke páratlan marad.
Tehát nem lehet elérni, hogy az összeg 2016 (páros) legyen.
b) A 185. Az idei tanév a gimnázium 185. tanéve.

8. Egy rombusz oldalait azonos forgásirányban a kétszeresére hosszabbítjuk. Hányszorosa az így kapott négyszög területe az eredeti rombusz területének?



Átdarabolással belátható, hogy a feladatban szereplő négyszög területe az eredeti rombusz területének ötszöröse. Az ábrán látható, hogy négy újabb rombusz jön létre az átdarabolás során.