SZEGŐ GÁBOR MATEMATIKAVERSENY 2015/2016.

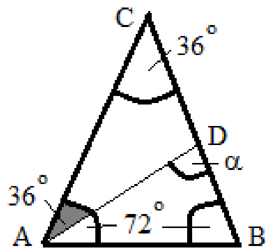
AZ II. FORDULÓ FELADATAINAK MEGOLDÁSA

1. Egy raktárban 500 tonnával több szén van, mint egy másikban. Mennyi szenet vigyünk át az első raktárból a másodikba, hogy az elsőben csak 130 tonnával legyen több, mint a másodikban?

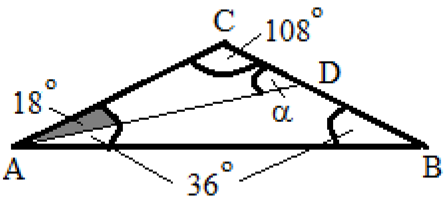
Vigyünk el gondolatban 130 t szenet az első raktárból. Így már csak 370 t-val lenne több szén az első raktárban. Ha most a 370 t szén felét (185 t) átvisszük a második raktárba, akkor a két raktárban azonos tömegű szén lesz.
Ellenőrzés: Kezdetben $x + 500$ és x tonna szén volt a raktárakban.
A szállítás után $x + 315$ és $x + 185$ tonna szén van.
$x + 185 + 130 = x + 315$.
Tehát 185 t szenet kell átszállítani az első raktárból a másodikba.

2. Egy egyenlő szárú háromszög oldalai 36°-os szöget zárnak be. Mekkora szöget zár be az alapon fekvő szög szögfelezője a szemközti szárral?

Két eset lehetséges.



Ha az egyenlő szárú háromszög két szára által bezárt szög a 36°-os.
Használjuk az ábra jelöléseit!
Az alapon fekvő szögek
$0,5(180° - 36°) = 72°$-osak.
α az $ADC\Delta$ külső szöge.
Így $\alpha = 36° + 36° = 72°$.



Ha az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei 36°-osak.
Használjuk az ábra jelöléseit!
α az $ABD\Delta$ külső szöge.
Így $\alpha = 18° + 36° = 54°$.

Tehát az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögének szögfelezője a szemközti szárral 54°-os vagy 72°-os szöget zár be.

3. Egy termék árának negyede a kereskedő haszna. Ha a kereskedő megemelné az árat 250 Ft-tal, akkor már az ár harmada lenne a haszna. Mennyi a termék eredeti ára?

kezdeti ár:	x Ft	új ár:	$(x + 250)$ Ft
a haszon:	$0,25\,x$ Ft	az új haszon:	$((x + 250)/3)$ Ft
beszerzési ár:	$0,75\,x$ Ft	beszerzési ár:	$(2(x + 250)/3)$ Ft

A kétféleképpen számolt beszerzési ár egyenlő: $0,75\,x = 2(x + 250)/3$
Ebből $x = 2000$.
Ellenőrzés: Kezdetben: $2000 = 500 + 1500$ Emelés után: $2250 = 750 + 1500$
Tehát a termék eredeti ára 2000 Ft.

4. Bizonyítsd be, hogy a 2015p + 7 nem lehet prímszám, ha p prímszámot jelöl!

Ha $p = 2$, akkor $2015p + 7 = 4037 = 11 \cdot 367$. Nem prímszám.
Ha $p > 2$, akkor p páratlan szám.
Ekkor $2015p$ is páratlan szám lesz, mert két páratlan szám szorzata.
$2015p + 7$ biztosan páros szám, mert két páratlan számnak az összege. Nem prímszám.
Tehát bármely p prímszám esetén $2015p + 7$ nem lehet prím.

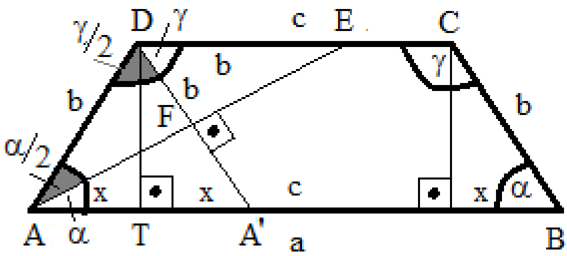
5. Egy félkörlemez kerületének mérőszáma deciméterekben mérve százada a négyzetcentiméterekben mért területének. Mekkora a félkör sugara deciméterekben mérve?

Mivel 1 dm^2 = 100 cm^2, a négyzetdeciméterben megadott terület mérőszáma megegyezik a deciméterben mért kerület mérőszámával.
Az r sugarú félkör kerülete $r\pi + 2r$. Az r sugarú félkör területe $0{,}5r^2\pi$, ahol $r > 0$.
Az előbbiek alapján $r\pi + 2r = 0{,}5r^2\pi$.
Ebből $r = (4 + 2\pi)/\pi \approx 3{,}273$ dm.

6. Egy szimmetrikus trapéz egyik alapja 36 cm, a másik ennek 5/3-a. A szárak 24 cm hosszúak.

a) Mekkorák a trapéz szögei?

b) Milyen hosszú a belső szögfelezőknek a trapézba eső része?



Használjuk az ábra jelöléseit!
a) $c = 36$ cm, $a = 5c/3 = 60$ cm, $b = 24$ cm és $x = 0{,}5(a - c) = 12$ cm
Vegyük észre, hogy az ADTΔ egy szabályos háromszög fele. Így az α szög 60°.
$\gamma = 180° - \alpha = 120°$

b) Mivel $\gamma/2 = 60°$, ezért az AA'D szabályos háromszög A'D oldala a γ szög szögfelezője. Így ez a szögfelező b = 24 cm hosszúságú.
Az AA'D szabályos háromszög α szögének a szögfelezője merőleges a szemközti oldalra, amely a trapéz másik szögének szögfelezője. Így az AEDΔ egyenlő szárú.
Az ADFΔ és az DEFΔ egy szabályos háromszög fele. Az AE szakasz hossza egyenlő a b oldalú szabályos háromszög magasságának kétszeresével.
$AE = 2\sqrt{24^2 - 12^2} = 2\sqrt{432} = 24\sqrt{3} \approx 41{,}569$ cm.

7. Van négy számkártyánk: $\boxed{0}$ $\boxed{5}$ $\boxed{7}$ $\boxed{9}$

a) Hány olyan négyjegyű számot állíthatunk össze belőlük, amelyek oszthatók öttel?

b) Hány olyan négyjegyű számot állíthatunk össze belőlük, amelyek kisebbek 7500-nál?

a) Ha egy szám osztható 5-tel, akkor a szám utolsó számjegye 0 vagy 5 lehet.
Ha az utolsó számjegy a 0, akkor $3\cdot2\cdot1 = 6$ lehetőség van.
Ha az utolsó számjegy az 5, akkor $2\cdot2\cdot1 = 4$ lehetőség van. (A 0 nem állhat a szám elején.)
Tehát 10 olyan négyjegyű számot állíthatunk elő, amely osztható öttel.

b) Az első számjegy csak 5-ös vagy 7-es lehet.
Ha az első számjegy az 5, akkor $3\cdot2\cdot1 = 6$ lehetőség van.
Ha az első számjegy a 7, akkor a második számjegy csak a 0 lehet.
Így $2\cdot1 = 2$ lehetőség van.
Tehát 8 olyan négyjegyű számot állíthatunk elő, amely kisebb 7500-nál.

8. Egy négyzetet kettévágunk egy egyenessel, majd a kapott részek közül csak az egyiket ismét kettévágjuk egy egyenessel és így tovább. A 185. vágás után megszámoljuk a keletkezett sokszögek csúcsait. Lehetséges-e, hogy 555 csúcsot számolunk meg?

Minden vágással egy újabb síkidomot hozunk létre. Így a 185. vágás után 186 síkidomunk lesz.
A megszámolt csúcsok száma akkor a legkevesebb, ha mindegyik síkidom háromszög.
Ez elérhető, mert a kezdő négyzetet a két szemközti csúcsára illeszkedő egyenes két háromszögre vágja; a háromszöget pedig az egyik csúcsára és a szemközti oldal valamelyik belső pontjára illeszkedő egyenes vágja két háromszögre.
A 186 háromszögnek $3\cdot 186 = 558$ csúcsa van.
Tehát nem lehetséges, hogy 555 csúcsot számolunk össze, mert a csúcsok száma minimum 558.