SZEGŐ GÁBOR MATEMATIKAVERSENY 2016/2017.

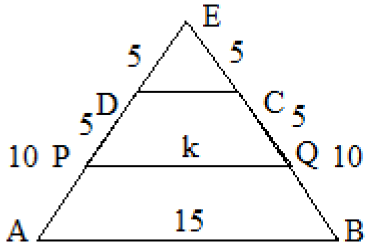
AZ I. FORDULÓ FELADATAINAK MEGOLDÁSA

1. Határozd meg azt a legkisebb természetes számot, amelyben a számjegyek összege 2017!

Egy többjegyű szám nagyságát úgy csökkenthetjük, hogy számjegyeinek a számát minimalizáljuk. Ehhez a feladat feltételei alapján a lehető legtöbb 9-es számjegyet kell felhasználni. A keresett számnak tartalmaznia kell 224 db 9-es számjegyet, mert $2017 = 224 \cdot 9 + 1$. A szám nagyságát csökkenthetjük azzal is, ha a lehető legkisebb számjeggyel kezdődik. Tehát a keresett szám 225 számjegyből áll: 1-es számjeggyel kezdődik, és utána 224 db 9-es számjegy áll.

2. Egy szimmetrikus trapéz egyik alapja 15 cm. Az ezen az alapon lévő szögek 60°-osak. A trapéz szárai 10 cm hosszúak. Mekkora a trapéz szárainak felezőpontját összekötő középvonal hossza?

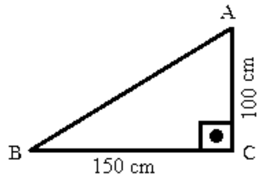
Használjuk az ábra jelöléseit!
Ha kiegészítjük a trapézt háromszögre, akkor egy olyan szabályos háromszöget kapunk (ABE∆), amelynek az oldalai 15 cm hosszúak.
Így a szabályos DCE∆ oldalai 5 cm (15 – 10) hosszúak.
A PQE∆ is szabályos, oldalai 10 cm-esek.
Tehát a keresett k középvonal hossza 10 cm.



3. Ha a 327-et és az 539-et elosztjuk ugyanazzal a kétjegyű számmal, akkor ugyanazt a maradékot kapjuk. Mennyi ez a maradék?

Jelöljük a kétjegyű számot k-val, a közös maradékot m-mel. Ekkor a maradékos osztás szerint $327 = h_1 \cdot k + m$ és $539 = h_2 \cdot k + m$. Vegyük észre, hogy a két szám különbsége osztható a kétjegyű számmal (k). $539 - 327 = 212 = 4 \cdot 53$. Ebből a felbontásból csak egy kétjegyű szám állítható elő, az 53. $327 = 6 \cdot 53 + 9$ és $539 = 10 \cdot 53 + 9$.
Így a keresett maradék a 9.

4. Az ábrán látható ABC derékszögű háromszöget úgy szeretnénk egy az AB átfogóval párhuzamos egyenessel két részre vágni, hogy a keletkező kis háromszög területe az eredeti háromszög területének a kilencede legyen. Mekkorák lesznek az így levágott kisebb derékszögű háromszög befogói?



Az ABC∆ derékszögű háromszög területe $t_{ABC} = \frac{150 \cdot 100}{2} = 7500$ cm^2. Így a keletkezett kis háromszög területe $t = \frac{t_{ABC}}{9} = \frac{2500}{3}$ cm^2. Az eredeti és a kis háromszög hasonló, mert megfelelő szögeik egyenlők. Így a befogók aránya a két háromszögben egyenlő. Az eredeti háromszögben a befogók aránya: $150 : 100 = 3 : 2$. Így jelölje a kis háromszögben az egyik befogót 3x, a másikat 2x. Ekkor a kis háromszög területe: $t = \frac{2x \cdot 3x}{2} = 3x^2 = \frac{2500}{3}$. Ebből $x = \frac{50}{3}$ cm. Tehát a kis háromszög befogói $\frac{100}{3}$ cm és 50cm.

5. Hány olyan hatjegyű szám van, amelyben pontosan egy hatos számjegy szerepel?

Ha 6-ossal kezdődik a szám, akkor minden további helyre 9 számból választhatunk. Ez összesen $9^5 = 59049$ lehetőség. Ha nem 6-ossal kezdődik, akkor további 5 azonos számú lehetséges eset van. Pl. legyen a második helyen 6-os: az első helyen 8 szám lehet (0 és 6 nem), a második helyen 1 lehetséges szám állhat, a hatos; a további négy hely mindegyikére 9-9 számjegy írható. Így ezek száma: $8 \cdot 1 \cdot 9^4 = 52488$.

Tehát az összes lehetséges esetek száma: 59049 + 5 ·52488 = 321489.

6. Egy túra alkalmával a tervezett 4 $\frac{km}{h}$-ás átlagsebesség helyett, az esős idő miatt, csak 3,5 $\frac{km}{h}$ volt az átlagsebesség. Így a tervezettnél háromnegyed órával tovább tartott az út. Milyen hosszú volt a gyalogtúra?

Jelölje x a túra hosszát km-ben mérve. Ekkor a túra eredetileg $\frac{x}{4}$ óráig tart. Az eső miatt a túra $\frac{x}{3{,}5}$ óráig tart. A feltételek szerint $\frac{x}{4} + \frac{3}{4} = \frac{x}{3{,}5}$. Ebből x = 21. Tehát a gyalogtúra 21 km hosszú volt.

7. Hány oldalú az a konvex sokszög, amelynek hétszer annyi átlója van, mint oldala?

Az n oldalú sokszögnek n oldala és $\frac{n(n-3)}{2}$ átlója van. A feltételek szerint: 7n = $\frac{n(n-3)}{2}$. Ebből n = 17.
Tehát a sokszög oldalainak száma 17.

8. Egy dobozban 10 fehér, 20 piros és 30 zöld golyó van. Legalább hány golyót kell véletlenszerűen kivenni a dobozból, hogy a kivett golyók között biztosan legyen

a) legalább egy piros;

b) négy egyforma színű golyó?

a) A legrosszabb estben kihúzzuk a fehér és a zöld golyókat is (10 + 30 = 40). Így a 41. húzásra kerül sor az első piros golyóra.
Tehát legalább 41 golyót kell kihúzni.

b) A legrosszabb eset, ha kihúzunk 3-3 fehér, piros és zöld golyót. Így a tizedik húzásra már valamelyik színből 4 kihúzott golyó lesz.
Tehát legalább 10 golyót kell kihúzni, hogy biztosan legyen 4 azonos színű golyó.