SZEGŐ GÁBOR MATEMATIKAVERSENY 2016/2017.

A II. FORDULÓ FELADATAINAK MEGOLDÁSA

1. Balázsnak 18 db fémpénze van, csupa 20 és 50 forintosak. Amikor Balázs a pénzét számolgatta, észrevette, hogy a pénze megduplázódna, ha minden 20 forintos 50 forintossá, és minden 50 forintos 20 forintossá változna. Hány forintja van Balázsnak?

Jelölje Balázs 20 forintosainak számát x. Ekkor az 50 forintosok száma 18 – x.
Balázsnak 20x + 50(18 – x) forintja van.
Az érmék felcserélése után 50x + 20(18 – x) forintja lenne.
A feltételek szerint: 2[20x + 50(18 – x)] = 50x + 20(18 – x)
Ebből x = 16.
Tehát Balázsnak 16 db 20 és 2 db 50 forintos érméje van.
Az érmék értéke 420 Ft (= 16·20 + 2·50), amely megfelel a feladat feltételeinek:
(2·420 = 840 = 16·50 + 2·20).

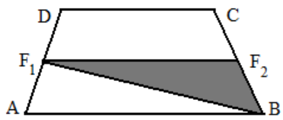
2. Az A és B települések távolsága 50 km. A két helységből egyszerre indul el egy-egy jármű. Az egyik átlagsebessége 75 $\frac{km}{h}$, a másiké 25 $\frac{km}{h}$. Mekkora távolságra lesznek egymástól 36 perc múlva, ha

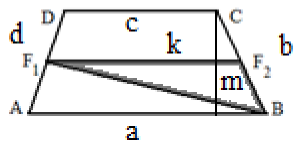
a) egymással szemben haladnak;

b) egy irányba haladnak?

Az eltelt idő: t = 36 perc = 0,6 h. A járművek sebessége: $v_1 = 75\,\frac{km}{h}$ és $v_2 = 25\,\frac{km}{h}$.
Az általuk megtett út: $s_1 = tv_1 = 45$ km és $s_2 = tv_2 = 15$ km.
a) Ha egymással szemben haladnak, akkor fél óra múlva találkoznak, majd 6 percig távolodnak egymástól. Így 10 km távolságra lesznek egymástól.
b) Ha egy irányba haladnak, akkor két megoldás van. Attól függően, hogy melyik jármű halad elöl, a távolság lehet 80 km, illetve 20 km.

3. Hány %-a az ABCD trapéz területének a szürkére színezett síkidom területe? (Az F pontok felezik az oldalakat.)





Használjuk az ábra jelöléseit.
A trapéz területe: $t_{ABCD} = \frac{a+c}{2}$ m.
A trapéz k középvonala párhuzamos az alapokkal, és hossza az alapok hosszának számtani közepe: $k = \frac{a+c}{2}$
Az $F_1BF_2\Delta$ egyik oldala k, és a hozzá tartozó magasság $\frac{m}{2}$. Így a szürkére színezett háromszög területe: $t = k\frac{m}{4} = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{m}{4}$. Ez a trapéz területének 25 %-a.

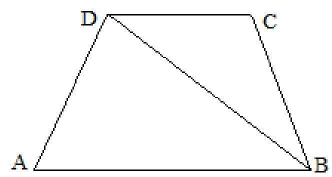
SZEGŐ GÁBOR MATEMATIKAVERSENY 2016/2017.

A II. FORDULÓ FELADATAINAK MEGOLDÁSA

4. András pénzének 36%-a ugyanannyi, mint Benő pénzének 48%-a. Mennyi pénzük van külön-külön, ha pénzeik különbsége 5700 Ft?

Jelöljük András pénzét x-szel. Ekkor Benő pénze x – 5700.
A feltételek szerint $0,36 \cdot x = 0,48 \cdot (x - 5700)$. Ebből $x = 22800$.
Így Andrásnak 22 800 Ft-ja, Benőnek 17 100 Ft-ja van.
Ez megfelel a feladat feltételeinek.

5. Az ABCD trapéz C csúcsánál lévő belső szöge 114°, a CBD szög 18°, és az AB alapja egyenlő hosszúságú a BD átlójával.



a) Mekkora a BDA szög?

b) Mit mondhatunk még a trapézról?

A trapéz szárain fekvő szögeinek az összeg 180°. Így az ABC szög (180° – 114° =) 66°.
Az ABD szög 48° (= 66° – 18°). Az ABDΔ egyenlő szárú (AB = BD).
Az alapon fekvő szögek is egyenlők: $0,5 \cdot (180° - 48°) = 66°$.
Tehát a BDA szög 66°.
A trapéz alapon fekvő szögei is egyenlők. A trapéz tehát szimmetrikus.

6. A hagyományos óra kismutatója 165°-kal kisebb szöggel fordult el, mint az óra nagymutatója. Mennyi idő telt el ezalatt?

A nagymutató szögsebessége 12-szerese a kismutató szögsebességének. Így a mutatók szögelfordulásának aránya is 12 : 1. A szögelfordulások különbsége $\frac{11}{12}$ része a nagymutató elfordulásának. Ebből a nagymutató szögelfordulása 180°.
$180° = \frac{12}{11} 165°$. Tehát 30 perc telt el.

7. Melyik az a természetes szám, amelyik 823-nál számjegyei összegével kisebb?

A keresett szám csak háromjegyű lehet, különben nagy lenne a két szám közötti különbség. Jelöljük a keresett számot $\overline{abc}$-vel.
Ekkor $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, ahol az a értéke csak 7 vagy 8 lehet.
A feltételek szerint: $\overline{abc} + a + b + c = 101a + 11b + 2c = 823$.
Ebből a = 7 esetén nem kapunk megoldást.
Az a = 8 esetén az oszthatóság figyelembevételével b = 1 és c = 2 adódik.
Így a keresett szám a 812.

8. Az 1; 2; 3; … ; 44; 45 számokat 15 hármas csoportba szeretnénk osztani úgy, hogy mind a 15 csoportban legyen két olyan szám, amelyek összegének a harmada a harmadik számmal egyenlő. Lehetséges-e ilyen felosztás?

Jelöljük az egyik ilyen csoportba kerülő számokat a, b és c-vel.
Ekkor a feltételek szerint: $\frac{a+b}{3} = c \rightarrow a + b = 3c \rightarrow a + b + c = 4c$.
Tehát az egy-egy hármas csoportba kerülő számok összege osztható 4-gyel.
Így a 15 csoportba kerülő számok összegének is oszthatónak kell lennie 4-gyel.
A felhasznált számok összege $1 + 2 + \ldots + 45 = 23 \cdot 45$ nem osztható 4-gyel.
Tehát nem létezik a feltételeknek megfelelő felosztás.