SZEGŐ GÁBOR MATEMATIKAVERSENY 2017/2018.

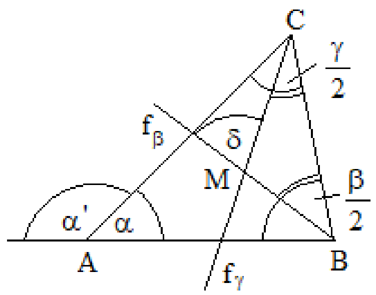
A II. FORDULÓ FELADATAINAK MEGODÁSA

1. Aladár és Boldizsár színes gömbökkel játszik. Az mondja Boldizsár Aladárnak: „Adj nekem 3 gömböt, akkor nekem kétszer annyi lesz, mint neked.” Aladár így válaszol: „Inkább te adj nekem 12 gömböt, akkor mindkettőnknek ugyanannyi gömbje lesz.” Hány gömbje van Aladárnak és Boldizsárnak külön-külön?

Jelölje Aladár és Boldizsár gömbjeinek számát x illetve y!
Ekkor a feltételek szerint: $y + 3 = 2(x - 3)$
és $x + 12 = y - 12$.
Ezekből: $x = 33$ és $y = 57$.
Tehát Aladárnak 33, Boldizsárnak 57 színes gömbje van.

2. Egy háromszög egyik belső szöge a hozzá tartozó külső szög harmada. Mekkora szöget zár be a háromszög másik két belső szögének szögfelező egyenese?

Használjuk az ábra jelölését!
$\alpha' + \alpha = 180°$ és $\alpha' = 3\alpha$.
Ezekből $\alpha = 45°$.
A BCMΔ-nek δ külső szöge, amely a nem mellette fekvő két belső szög összege. Így $\delta = \frac{\beta+\gamma}{2}$.
$\beta + \gamma = 180° - \alpha = 135°$.



Tehát a két szögfelező egyenese 67,5°-os szöget zár be.

3. Egy pantalló árát végkiárusítás alkalmával 36 %-kal csökkentették. Mivel az árut még mindig nem vásárolták kellő mennyiségben, ezért az új árát újabb 19 %-kal csökkentették. A két árcsökkentés után a pantalló ára 7776 Ft.

a) Mennyi volt a nadrág eredeti ára?

b) Hány százalékos az árcsökkentés a két változtatás után?

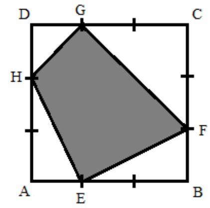
c) Hány százalékos az átlagos árcsökkentés? (Az a százalékláb, amellyel kétszer csökkentve a nadrág árát ugyanazt az értéket kapjuk, mint a tényleges csökkentések után.)

Jelölje a nadrág eredeti árát x Ft! $p_1 = 36$; $p_2 = 19$; és p az átlagos árcsökkentés.
Az első árcsökkentés után a nadrág ára: $\left(1 - \frac{p_1}{100}\right)x$ Ft.
A második árcsökkentés után: $\left(1 - \frac{p_2}{100}\right)\left(1 - \frac{p_1}{100}\right)x$ Ft.
A feltételek szerint: $\left(1 - \frac{p_2}{100}\right)\left(1 - \frac{p_1}{100}\right)x = 7776$.
Behelyettesítés után: $0{,}64 \cdot 0{,}81x = 7776$. Ebből $x = 15000$.
A pantalló 7776 Ft-os ára az eredeti ár $\frac{7776}{15000} \cdot 100\% = 51{,}84\%$-a.
Így az árcsökkentés (100% - 51,84% =) 48,16%-os.
Az átlagos árcsökkentés esetén:
$\left(1 - \frac{p_2}{100}\right)\left(1 - \frac{p_1}{100}\right)x = \left(1 - \frac{p}{100}\right)\left(1 - \frac{p}{100}\right)x$.
$0{,}64 \cdot 0{,}81 = \left(1 - \frac{p}{100}\right)^2$. Ebből $\left(1 - \frac{p}{100}\right) = 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}72$. Így $p = 28$.
Tehát a nadrág eredeti ára 15000 Ft volt.
A két változtatás után 48,16%-os az árcsökkenés.
Ez átlagosan 28%-os csökkentést jelent.

SZEGŐ GÁBOR MATEMATIKAVERSENY 2017/2018.

A II. FORDULÓ FELADATAINAK MEGODÁSA

4. Az EFGH négyszög csúcsai az ABCD négyzet oldalainak az ábra szerinti harmadoló pontjai. Hányad része a négyzet területének a szürkére festett négyszög területe?

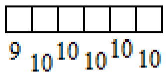


A négyzet oldalait jelöljük 3a-val! Ekkor a területe: $t_{ABCD} = 9a^2$.
A négyzet csúcsainál lévő derékszögű háromszögek területe könnyen meghatározható: $t_{EBF} = t_{AEH} = a^2$; $t_{FCG} = 2a^2$; $t_{GDH} = 0{,}5a^2$.
Ez összesen: $t_ö = 4{,}5a^2$. Így a négyszög területe: $t_{EFGH} = t_{ABCD} – t_ö = 4{,}5a^2$.
Tehát a szürkére festett négyszög területe fele a négyzet területének.

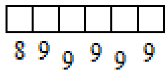
5. Hány olyan hatjegyű szám van, amelyben legalább egy hatos számjegy szerepel?

Egy hatjegyű számban a hatos számjegyek száma: 0; 1; 2; 3; 4; 5; illetve 6 lehet. A legalább egy hatos számjegyből álló hatjegyű számok számát megkapjuk, ha az összes hatjegyű számok számából kivonjuk azoknak a számát, amelyek nem tartalmaznak hatos számjegyet.

Az összes hatjegyű számok száma: $n = 9\cdot 10^5$.
(100 000 és 999 999 között 900 000 szám van.)

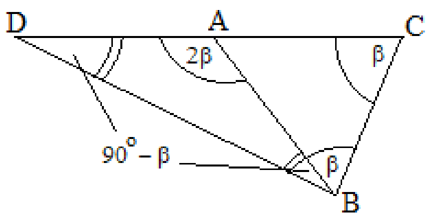


Hatos számjegyet nem tartalmazó hatjegyű számok száma: $n_1 = 8\cdot 9^5 = 472\,392$.



Tehát $n - n_1 = (900\,000 – 472\,392 =)\ 427\,608$ olyan hatjegyű szám van, amelyben legalább egy hatos számjegy szerepel.

6. Az ABC háromszögben AB = AC. Hosszabbítsuk meg az AC oldalt A-n túl a D pontig úgy, hogy AC = AD legyen! Bizonyítsuk be, hogy a BCD háromszög derékszögű!



Használjuk az ábra jelölését!
A feladat egyik feltétele szerint: AB = AC.
Ezért az ABCΔ-ben a B és C csúcsoknál β szög van. Az ABDΔ-ben az A csúcsnál lévő szög külső szöge az ABCΔ-nek. Ez a szög egyenlő a nem mellette fekvő két belső szög összegével, 2β-val.
A feladat másik feltétele szerint: AC = AD = AD (az első feltételt felhasználva). Így az ABDΔ is egyenlő szárú. A B és D csúcsoknál egyenlő szögek vannak. A Δ-ek belső szögeinek összegére vonatkozó tétel alapján ezek a szögek 90° - β nagyságúak.
Tehát a BCDΔ B csúcsánál lévő szög derékszög.

7. Határozzuk meg az x, y és z számjegyeket úgy, hogy $\overline{135xyz}$ hatjegyű szám osztható legyen 72-vel!

$72 = 8\cdot 9$, és ezek a számok relatív prímek. Így elég a 8-cal és a 9-cel való oszthatóságot bizonyítani. Az $n = \overline{135xyz}$ hatjegyű szám akkor osztható 8-cal, ha $\overline{xyz}$ háromjegyű szám osztható 8-cal.
n akkor osztható 9-cel, ha 1 + 3 + 5 + x + y + z szám osztható 9-cel.
Mindkét feltételnek eleget tesz $135\,000 = 72\cdot 1875$.

n lehetséges értékei 135 000-től 135 999-ig terjednek. Ez 1000 db egymást követő természetes szám. Ezek közül minden 72. szám osztható 72-vel: 135 000; 135 072; 135 144; 135 216; 135 288; 135 360; 135 432; 135 504; 135 576; 135 648, 135 720; 135 792; 135 864; 135 936.

Táblázatba foglalva:

x	0	0	1	2	2	3	4	5	5	6	7	7	8	9
y	0	7	4	1	8	6	3	0	7	4	2	9	6	3
z	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8	0	2	4	6

8. Egy 3 cm élű kocka minden oldallapjára, a laphoz illeszkedően egy 3 cm × 3 cm × 9 cm-es négyzetes oszlopot ragasztunk. Az így kapott testet festékbe mártjuk.

a) Hány cm^2-t festettünk be?

A festett testet veszteségmentesen 3 cm élű kockákra vágjuk szét (csak kockák jönnek létre).

b) Hány kocka jön létre a darabolással?

c) Hány olyan kocka van, amelyeknek pontosan négy oldala festett?

a) A festéskor a négyzetes oszlopok palástját és az egyik fedőlapját festjük be. Ez összesen $6\cdot(4\cdot3\cdot9 + 9) = 702$ (cm^2).

b) A 3 cm × 3 cm × 9 cm-es négyzetes oszlop 3 db 3 cm élű kockából áll. A daraboláskor $6\cdot3 = 18$ újabb kocka keletkezik. Így az eredeti kockával együtt 19 db kocka jön létre.

c) Festéskor a középső, eredeti kockának egyik lapját sem festjük be. A kereszt végeinél lévő kockáknak 5 oldalát festjük be. A többi kockának pontosan négy oldala lesz festett. Tehát 12 db (19 – 1 – 6) kockának lesz pontosan négy oldala festett.