

SZEGŐ GÁBOR MATEMATIKAVÉRSÉNY 2018/2019

A I. FORDULÓ FELADATAINAK MEGOLDÁSA

1. Egy város lakossága tíz év alatt 12 %-kal növekedett. Mennyi volt kezdetben a lakosok száma, ha a lakosok számának gyarapodása 8160 fő?

Jelöljük x -szel a lakosok kezdeti számát! Ekkor a feltételek szerint $8160 = \frac{12}{100} x$.

Ebből $x = 68\,000$. Tehát kezdetben a város lakosainak száma **68 000 fő** volt.

2. Hány számjegy kell az 1000^{2018} hatvány leírásához?

$1000 = 10^3$. Ez a 4 számjegyű szám: 1 db 1-es és 3 db 0-ás.

A hatványozás azonosságait felhasználva: $1000^{2018} = (10^3)^{2018} = 10^{6054}$.

10^{6054} : 1 db 1-es és 6054 db 0-ás.

Tehát az 1000^{2018} hatvány leírásához **6055 számjegy** kell.

3. Melyik az a legkisebb természetes szám, amelyben a számjegyek összege 2018? Az indoklást is írd le!

Két természetes szám közül az a kisebb, amelyik számjegyeinek a száma kevesebb. Két azonos számjegyű természetes szám közül az a kisebb, amelyik

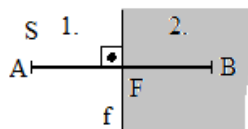
1. számjegye (2. számjegye; 3. számjegye; ... az első eltérésig) kisebb.

$2018 = 9 \cdot 224 + 2$.

Így a keresett természetes szám 225 számjegyből áll: **2999 ... 9**.

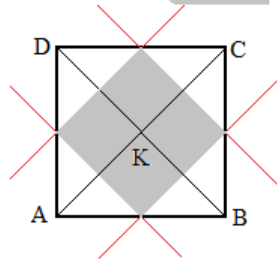
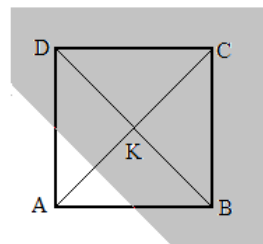
2-es számjeggyel kezdődik, majd 224 db 9-essel folytatódik.

4. Egy 5 cm oldalhosszúságú négyzeten satírozással jelöld meg azon pontok halmazát, amelyek a csúcsoktól távolabb vannak, mint a középponttól! Válaszodat indokold is meg!



Tanultuk, hogy az S síkban lévő AB szakasz felező merőlegese a síkot két félsíkra (1. és 2.) bontja. A két félsík közül az 1. félsíkban lévő pontok az A ponthoz, a 2.-ban lévők a B ponthoz vannak közelebb.

Az AK szakasz felező merőlegese által határolt, az első ábrán szürkével jelölt félsík pontjai a K ponthoz közelebb vannak, mint az A ponthoz. A gondolatmenetet folytatjuk a négyzet további csúcspontjaira (B , C , D). Az így kapott 4 félsík közös részének pontjai a csúcsoktól távolabb lesznek, mint a középponttól. Tehát a feladat megoldása a második ábrán látható (nyílt) **szürke négyzet**. (A szürke négyzet határvonala nem része a megoldásnak.)



SZEGŐ GÁBOR MATEMATIKAVERSENY 2018/2019

A I. FORDULÓ FELADATAINAK MEGOLDÁSA

5. Egy egyenes hasáb alapja olyan derékszögű háromszög, amelynek átfogója 20 cm, egyik befogója 1,2 dm. A hasáb térfogata 1056 cm^3 . Mekkora a hasáb felszíne?

Használjuk az ábra jelöléseit!

$a = 1,2 \text{ dm} = 12 \text{ cm}$; $c = 20 \text{ cm}$.

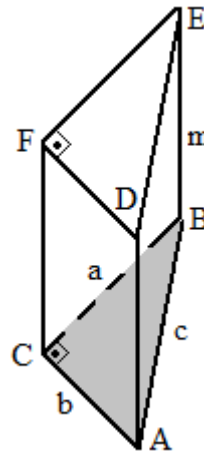
Az $ABC\Delta$ derékszögű, amelyre alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt: $a^2 + b^2 = c^2$. Ebből $b = 16 \text{ cm}$.

A hasáb térfogata: $V = m \cdot t_{ABC}$. Az alap területe:

$t_{ABC} = 0,5ab = 96 \text{ cm}^2$. $V = 0,5abm$. Ebből kapjuk,

hogy $m = 11 \text{ cm}$. A hasáb felszíne:

$A = 2t_{ABC} + m(a + b + c) = 720 \text{ cm}^2$.



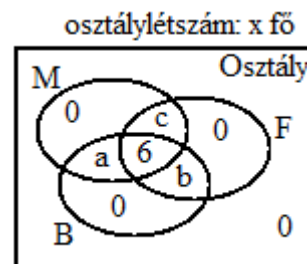
6. Egy osztály tanulói háromféle szakkörre járnak: matematikára, fizikára és biológiára. Matematika szakkörre az osztály 90 %-a, fizikára 70 %-a, biológiára 60 %-a jár. Továbbá tudjuk, hogy 6 tanuló mindhárom, a többiek pedig pontosan két szakkörre járnak. Hányan vannak az osztályban?

A feltételek szerint mindenki jár legalább két szakkörre. Tehát 0 vagy 1 szakkörre senki sem jár. Használjuk az ábra jelöléseit!

Matematika szakkörre járók: $\frac{90}{100}x = a + c + 6$

Fizika szakkörre járók: $\frac{70}{100}x = b + c + 6$

Biológia szakkörre járók: $+\frac{60}{100}x = a + b + 6$



A három egyenletet összeadva: $2,2x = 2(a + b + c + 6) + 6$

Használjuk fel, hogy $a + b + c + 6 = x$! Így a $0,2x = 6$ egyenletet kapjuk.

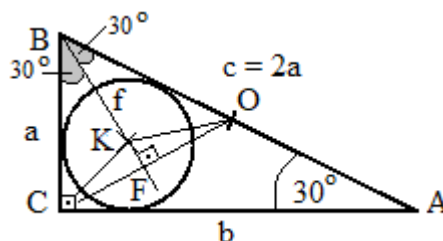
Ebből $x = 30$. Tehát az osztálylétszám **30 fő**.

7. Az ABC derékszögű háromszög BAC szöge 30° . A háromszögbe írható kör középpontját jelöljük K -val, az AB átfogó felezőpontját O -val! Bizonyítsd be, hogy $CK = OK$!

Használjuk az ábra jelöléseit!

A derékszögű $ABC\Delta$ köré írható kör középpontja (O) az átfogó felezőpontja.

Az ABC derékszögű háromszög egy szabályos háromszög fele. Így $AB = 2a = 2BC$. A B csúcsonál lévő β szög 60° -os.



A háromszögbe írható kör középpontja a szögfelezők metszéspontja.

A $BCO\Delta$ szabályos, mert olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek szárai 60° -os szöveget zárnak be. Az $ABC\Delta$ B csúcsból induló f (BK) szögfelezője a BCO szabályos háromszögnek is szögfelezője. Így f szakaszfelező merőlegese a CO szakasznak. Tehát K illeszkedik a CO szakasz felezőmerőlegesére. Így $CK = OK$.

SZEGŐ GÁBOR MATEMATIKAVERSENY 2018/2019

A I. FORDULÓ FELADATAINAK MEGOLDÁSA

8. Vegyük az összes olyan háromjegyű természetes számot, amelyeknek minden számjegye páros! Mennyi ezen számok összege?

Az ilyen számok száma: $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$.

Számoljuk össze a 100-asokat:

$$25(2 + 4 + 6 + 8) \cdot 100 = 50\,000.$$

A tízesek összege:

$$20(0 + 2 + 4 + 6 + 8) \cdot 10 = 4\,000.$$

Az egyesek összege:

$$20(0 + 2 + 4 + 6 + 8) \cdot 1 = 400.$$

Ez összesen **54 400**.

	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
Lehetséges	2	0	0
számjegyek	4	2	2
helyiérték	6	4	4
szerint.	8	6	6
	8	8	