SZEGŐ GÁBOR MATEMATIKAVERSENY 2019/2020.

A II. FORDULÓ FELADATAINAK MEGOLDÁSA

1. A számok értékének tizedes tört alakban való meghatározása nélkül állítsd növekvő sorrendbe az alábbi törteket!

$$\frac{8}{9};\qquad \frac{44444}{55555};\qquad \frac{5555}{6666};\qquad \frac{77}{88};\qquad \frac{666}{777}$$

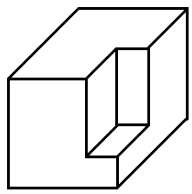
Hozzuk a törteket egyszerűbb alakra:

$$\frac{44444}{55555}=\frac{4\cdot 11111}{5\cdot 11111}=\frac{4}{5};\quad \frac{5555}{6666}=\frac{5\cdot 1111}{6\cdot 1111}=\frac{5}{6};\quad \frac{77}{88}=\frac{7\cdot 11}{8\cdot 11}=\frac{7}{8};\quad \frac{666}{777}=\frac{6\cdot 111}{7\cdot 111}=\frac{6}{7}$$

$$\frac{8}{9}=1-\frac{1}{9};\qquad \frac{4}{5}=1-\frac{1}{5};\qquad \frac{5}{6}=1-\frac{1}{6};\qquad \frac{7}{8}=1-\frac{1}{8};\qquad \frac{6}{7}=1-\frac{1}{7}$$

A törtek 1-nél kisebbek, és úgy állíthatók elő, hogy 1-ből kivonunk egy olyan törtet, amelynek a számlálója is 1. Az ilyen törtek közül az a legkisebb, amelyiket úgy állítjuk elő, hogy az 1-ből a legkisebb nevezőjű törtet vonjuk ki. Így a törtek növekvő sorrendje: $\frac{44444}{55555}\langle\frac{5555}{6666}\langle\frac{666}{777}\langle\frac{77}{88}\langle\frac{8}{9}$

2. Az ábrán látható modern szobrot úgy készítette a szobrász, hogy egy kockából kivágott egy téglatestet. Az eredeti kocka térfogata 125 dm^3 volt, a kivágott téglatesté pedig 12 dm^3. Hány dm^2 a szobor felszíne?



A szobor felszíne azonos az eredeti kocka felszínével, mert a téglatest eltávolításakor a kocka oldallapjainak területe annyival csökken, amennyi az újonnan létrehozott lapok területe. Így az eredeti kocka felszínét kell meghatározni.
Jelölje a kocka oldaléleit a.
$V_{kocka} = a^3 = 125\ dm^3 \Rightarrow a = 5\ dm$.
Így $A_{kocka} = A_{szobor} = 6\cdot a^2 = 150\ dm^2$.

3. Adél, András és Árpád két tucat süteményt evett meg összesen. Mindhárman egész (pozitív egész) számú süteményt fogyasztottak el. András többet evett Adélnál és Árpádnál is. Legalább hány sütit kell Andrásnak megennie, hogy az előző állítás minden esetben igaz legyen?

A feladat feltételei miatt mindenki fogyasztott legalább 1 süteményt. Ha András megette a sütemények felét, egy tucatot (12-t), akkor a maradék 12 süteményből egy személy már csak legfeljebb 11-et ehet meg.
Ha viszont András csak 11 süteményt evett, akkor a fennmaradó 13 sütit el lehet úgy is osztani Adél és Árpád között, hogy az állítás ne legyen minden esetben igaz (1 és 12).
Tehát András legalább 12 (egy tucat) süteményt evett meg.

SZEGŐ GÁBOR MATEMATIKAVERSENY 2019/2020.

A II. FORDULÓ FELADATAINAK MEGOLDÁSA

4. Egy szimmetrikus háromszög két külső szögének összege 200°. Mekkorák lehetnek a háromszög belső szögei?

Ha a háromszög szimmetrikus, akkor biztosan van két egyenlő szöge.
a) Legyen a két egyenlő belső szöghöz tartozó külső szögek összege 200°. Ekkor az egyik külső szög 100°.
Az ehhez tartozó belső szög 80°. Így a háromszög belső szögei: 80°, 80° és 20°.
b) Ha a két külső szög nem egyenlő, akkor jelölje a háromszög két egyenlő szögét α. Ekkor az egyik külső szög $180° - \alpha$,
a másik 2α. Ezek összege $180° + \alpha = 200°$.
Innen $\alpha = 20°$. Így a háromszög belső szögei: 20°, 20° és 140°.

5. Ha $\frac{a}{b} = \frac{9}{4}$ és $\frac{b}{c} = \frac{5}{3}$, akkor mennyi az $\frac{a-b}{b-c}$ kifejezés értéke?

Ha $\frac{a}{b} = \frac{9}{4} \Rightarrow b = \frac{4}{9}a$; ha $\frac{b}{c} = \frac{5}{3} \Rightarrow c = \frac{3}{5}b$.

Az első összefüggés felhasználásával: $c = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{9}a = \frac{4}{15}a$.

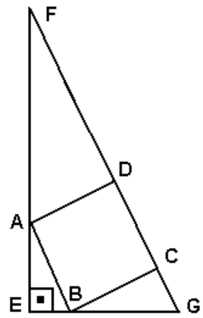
Így az eredeti összefüggés: $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a-\frac{4}{9}a}{\frac{4}{9}a-\frac{4}{15}a} = \frac{a\left(1-\frac{4}{9}\right)}{a\left(\frac{4}{9}-\frac{4}{15}\right)} = \frac{\frac{5}{9}}{\frac{8}{45}} = \frac{25}{8}$.

6. Az $1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm \ldots \pm 2018 \pm 2019$ összegben (különbségben) válasszuk meg úgy a műveleti jeleket, hogy az összeg a lehető legkisebb pozitív egész érték legyen!

Az $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 2018 + 2019$ összeg páros, mert az összegben szereplő páratlan számok száma páros.
Ha ebben az összegben egy n ($2 \leq n \leq 2019$) természetes szám előtt a műveleti jelet összeadásról kivonásra módosítjuk, akkor az összeg értéke 2n-nel (páros szám) csökken.
Mivel két páros szám különbsége mindig páros, ezért bárhogyan is módosítjuk a műveleti jeleket, a kapott szám mindig páros.
A legkisebb pozitív páros szám a 2. Ez a műveleti jelek megfelelő megválasztásával meg is valósítható.
Négy egymást követő természetes szám: n, $n + 1$; $n + 2$ és $n + 3$. Ezeket a számokat a következő módon összegezhetjük: $n - (n + 1) - (n + 2) + (n + 3) = 0$.
Mivel $2019 = 4 \cdot 504 + 3$, ezért a 2019-től elindulva a fenti módon előjelezett négyes csoportok összege 0 lesz.
Így az összeg értéke az első három számtól függ: $1 - 2 + 3 = 2$. Ezzel a feladatot megoldottuk.

SZEGŐ GÁBOR MATEMATIKAVERSENY 2019/2020.

A II. FORDULÓ FELADATAINAK MEGOLDÁSA



7. Az EFG derékszögű háromszögben az ábrán látható módon az ABCD négyzetet rajzoltuk. Hány cm hosszú az FG átfogó, ha EA = 8 cm és EB = 6 cm? (az ábra nem méretarányos)

Az ABE derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján: $AE^2 + BE^2 = AB^2$.
Ebből AB = 10 cm.
A négyzet oldalai egyenlők: AB = AD = BC = CD = 10 cm.
$ADF\Delta \approx BEA\Delta \approx GCB\Delta$, mert szögeik egyenlők.
Így $\frac{BE}{AE} = \frac{AD}{DF} \Rightarrow DF = \frac{40}{3}$ cm, $\frac{BE}{AE} = \frac{CG}{BC} \Rightarrow CG = \frac{15}{2}$ cm.
$FG = DF + CD + CG = \frac{40}{3}\text{cm} + 5\text{ cm} + \frac{15}{2}\text{cm} = 30\frac{5}{6} \approx 30{,}833$ cm.

8. Egy sorozat elemei pozitív egész számok, a harmadik tagtól kezdve mindegyik elem az összes őt megelőző elem összege. A sorozat első eleme 13, az n-edik eleme 4000. Mekkora a második elem, ha n a lehető legnagyobb?

A sorozat első két eleme: a és b
A feltételek szerint a = 2, és a sorozat elemei
$\underset{1.}{a};\ \underset{2.}{b};\ \underset{3.}{a+b};\ \underset{4.}{2(a+b)};\ \underset{5.}{4(a+b)};\ \ldots;\ \underset{n.}{2^{n-3}(a+b)}$
$2^{n-3}(a + b) = 4000 = 2^5 \cdot 5^3$
n úgy lesz a legnagyobb, ha $n - 3 = 5$,
amelyből n = 8 és $a + b = 5^3 = 125$.
Ebből b = 125 - 13 = 112.