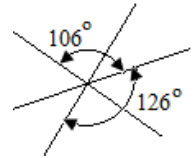


SZEGŐ GÁBOR MATEMATIKAVERSENY 2020/2021.

AZ I. FORDULÓ FELADATAINAK MEGOLDÁSA

1. Egy sík három egyenese egy pontban metszi egymást. A síkot így hat szögtartományra bontottuk. Két szöget az ábrán látható módon megadtunk. Hány fokok az ábrán látható szögtartományok?



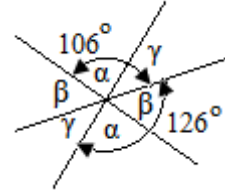
Használjuk az ábra jelöléseit!

$$106^\circ + 126^\circ - \alpha = 180^\circ$$

$$\text{Ebből } \alpha = 232^\circ - 180^\circ = 52^\circ.$$

$$\text{Továbbá } \beta = 126^\circ - \alpha = 74^\circ \text{ és}$$

$$\gamma = 106^\circ - \alpha = 54^\circ.$$



2. Andrásnak 11 darab 20 forintos van, Dezsőnek pedig 6 darab 50 forintos. Addig adogatják egymásnak a pénzt, míg ugyanannyi forintjuk lesz. Legalább hány érmének kell gazdát cserélnie?

$$\text{András: } 11 \cdot 20 \text{ Ft} = 220 \text{ Ft.}$$

$$\text{Dezső: } 6 \cdot 50 \text{ Ft} = 300 \text{ Ft.}$$

Összesen 520 Ft-juk van. Ennek a fele 260 Ft.

Így Dezsőnek 40 Ft-ot kell adnia Andrásnak.

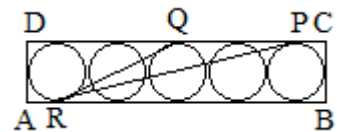
Ha Dezső 50 Ft-ot ad Andrásnak, akkor András nem tud megfelelően visszaadni.

Ha Dezső 100 Ft-ot ad (két 50-est) Andrásnak, és

András visszaad 60 Ft-ot (három 20-ast), akkor megfelezik a pénzüket.

Tehát legalább 5 érmének kell gazdát cserélnie.

3. Az ábrán látható módon öt darab 4 cm sugarú kört rajzolunk az ABCD téglalapba. A szomszédos körök érintik egymást. P, Q és R érintési pontok. Hány százaléka a PQRΔ területe az ABCD téglalap területének?



A téglalap oldalai $2r$ ($= 8 \text{ cm}$) és $10r$ ($= 40 \text{ cm}$) hosszúságúak.

A téglalap területe: $t_{ABCD} = 2r \cdot 10r = 20r^2$ ($= 320 \text{ cm}^2$).

A PQRΔ PQ oldala $4r$ ($= 16 \text{ cm}$), a hozzá tartozó magasság $2r$ ($= 8 \text{ cm}$).

$$\text{A háromszög területe: } t_{PQR} = \frac{4r \cdot 2r}{2} = 4r^2 \text{ } (= 64 \text{ cm}^2).$$

A keresett arány: $t_{PQR} : t_{ABCD} = 4r^2 : 20r^2 = 1 : 5$, amely 20%.

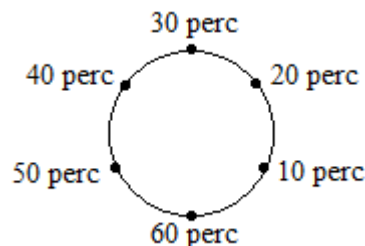
4. Szolnokon a 24-es autóbuszok körjáratként közlekednek. A vasútállomásról indulnak, és ide is érkeznek meg. A végállomásra történő megérkezésük után rögtön újra indulnak. Ha két busz jár a vonalon, akkor 30 percnként követik egymást. Hány buszt kell ezen a vonalon beállítani, hogy a követési időt a kétharmadával csökkentsek?

Ha a 30 perces követési időt a kétharmadával csökkentjük, akkor az új követési idő 10 perc.

Ha két busz esetén 30 perc a követési idő, akkor egy teljes körjárat 60 percig tart.

Így a 10 perces követési idő esetén

$6 \cdot 10 \text{ perc} = 60 \text{ perc}$ buszt kell beállítani.



SZEGŐ GÁBOR MATEMATIKAVERSENY 2020/2021.

AZ I. FORDULÓ FELADATAINAK MEGOLDÁSA

5. Az ABC egyenlő szárú háromszögben $AB = AC$. A B csúcsból induló belső szögfelező az AC oldalt a D pontban metszi. Mekkora a háromszög belső szögei, ha $BC = BD$?

Használjuk az ábra jelöléseit!

CDBA egyenlő szárú. Így a D csúcsnál is β szög van.

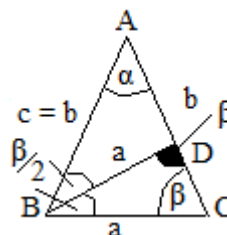
Ez a $\beta = \alpha + 0,5 \cdot \beta$, mert az ABDΔ külső szöge.

Ebből: $\alpha = 0,5 \cdot \beta$.

Az ABCΔ belső szögeinek az összege $180^\circ = \beta + \beta + 0,5\beta$.

Innen: $\beta = 72^\circ$ és $\alpha = 36^\circ$.

Tehát az ABCΔ belső szögei 72° , 72° és 36° .



6. Egy háromjegyű szám 4-esre végződik. Ha ezt a négyest a szám végéről áthelyezzük a szám elejére, akkor az eredetinel 27-tel kisebb számot kapunk. Melyik ez a háromjegyű szám?

Jelölje a keresett háromjegyű számot $\overline{ab4}$, ahol a és b számjegyek, és $a \neq 0$.

$$\overline{ab4} = 10 \cdot \overline{ab} + 4$$

Az áthelyezés után kapott szám: $\overline{4ab} = 400 + \overline{ab}$.

A feladat feltételei szerint: $(4\overline{ab} + 27 =) 400 + \overline{ab} + 27 = (\overline{ab4} =) 10 \cdot \overline{ab} + 4$.

Rendezés után: $423 = 9 \cdot \overline{ab}$, amelyből $\overline{ab} = 47$.

Ellenőrzés: $474 - 447 = 27$.

Tehát a keresett háromjegyű szám a **474**.

7. 1000 darab 2 cm élhosszúságú, nem átlátszó kockából összerakunk egy nagy kockát. Legfeljebb hány kis kockát láthatunk egyszerre, ha a nagy kockát bármely irányból nézhetjük?

A nagy kocka élei mentén 10 kocka helyezkedik el
($1000 = 10 \cdot 10 \cdot 10$).

A nagy kockának legfeljebb 3 lapját láthatjuk.

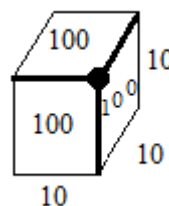
Minden lapon 100 kis kocka látható.

Az élek mentén elhelyezkedő 9-9 kis kocka azonban két laphoz is tartozik. Ezeket kétszer számoltuk össze.

A szemben lévő csúcsban elhelyezkedő kis kocka 3 laprészt.

Ezt háromszor vettük számításba.

Így a látható kis kockák száma $3 \cdot 100 - 3 \cdot 9 - 2 = 271$.



8. Legyen $A := 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2020^2$ és $B := 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \dots + 2019 \cdot 2021$. Mennyi az $A - B$ különbség?

$A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2020^2$. Ez 2020 tagú összeg.

$B = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \dots + 2019 \cdot 2021$. Ez 2019 tagú összeg.

$$\begin{aligned} B &= (2 - 1)(2 + 1) + (3 - 1)(3 + 1) + \dots + (2020 - 1)(2020 + 1) = \\ &= 2^2 - 1 + 3^2 - 1 + \dots + 2020^2 - 1 = 2^2 + 3^2 + \dots + 2020^2 - 2019. \end{aligned}$$

$$A - B = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2020^2 - (2^2 + 3^2 + \dots + 2020^2 - 2019) = 1 + 2019 = 2020.$$