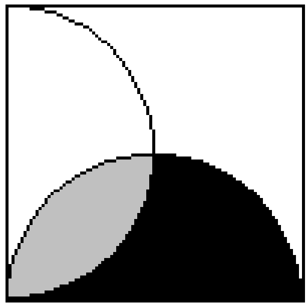
SZEGŐ GÁBOR MATEMATIKAVERSENY

2000/2001

II. FORDULÓ - MEGOLDÁS

1. A megmaradt 4 körte fél körtével kevesebb, mint az utolsó maradék fele, tehát az utolsó maradék 9, ebből a harmadik testvér 4,5 + 0,5 = 5 körtét kapott.



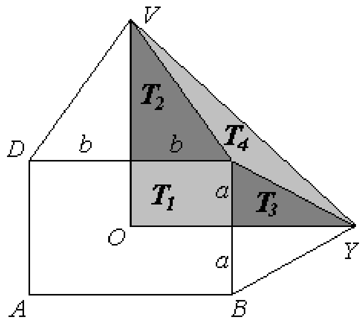
A 9 körte is fél körtével kevesebb, mint az első maradék fele, vagyis
(9 + 0,5)2 = 19, tehát a második testvér 9,5 + 0,5 = 10 körtét kapott.
A 19 körte 0,5 körtével kevesebb, mint az összes körte fele, azaz (19 + 0,5)2 = 39 körte volt a kosárban, így az első 20 körtét kapott.

2. Legyenek a téglalap oldalai *a* és *b*. Tudjuk, hogy ab = 2· (a + b).
Innen: 2a + 2b = ab, majd $\frac{2a}{ab}+\frac{2b}{ab}=1$, egyszerűsítés után $\frac{2}{b}+\frac{2}{a}=1$
a és b egyike sem lehet 1 vagy 2, mert akkor túl nagy lenne a bal oldali összeg.
Nem lehet minkét szám 4-nél nagyobb, mert akkor 1-nél kisebb lenne a bal oldali összeg.
Tehát az oldalak közül az egyik, mondjuk a = 3 vagy 4. Ha a = 3, akkor b = 6, ha pedig a = 4 akkor b = 4.
Tehát a téglalap oldalai 3 és 6, vagy pedig mindkettő 4.

3. $\frac{1}{2}$ sugarú negyed kör területe: $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2\pi}{4}$. Egy kis négyzet területe $\frac{1}{4}$ dm^2. A bal alsó négyzet két darab $\frac{1}{2}$ sugarú negyedkör uniója, de a világosszürke rész kétszeresen fedett, így e rész területe: $\frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^2\pi}{4}-\frac{1}{4}$ dm^2. A keresett rész területét úgy kapjuk meg, hogy az $\frac{1}{2}$ sugarú félkör területéből levonjuk a világosszürke területrészt: $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2\pi}{2}-\left(\frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^2\pi}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2\pi}{2}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2\pi}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ dm^2

4. Az első hajtás után 2 · 0,1 = 0,2 mm, a második hajtás után 2 · 0,2 = 0,4 mm,
a harmadik hajtás után 2 · 0,4 = 0,8 mm,
vagyis az *n*-dik hajtás után 0,1 · 2^n mm vastag lenne az összehajtott újságlap.
Így a 10-dik hajtás eredménye: 0,1 · 2^{10} = 102,4 mm =10,24 cm;
a 20-dik hajtás eredménye: 0,1 · 2^{20} = 104857,6 mm ≈ 105 m.

5. Az ábrát az XV, YW szimmetriatengelyek négy egybevágó részre osztják, ezért csak egy ilyen negyedet vizsgálunk. Azt állítjuk, hogy T1=T4.



T1= ab. A T2 területű rész egy derékszögű háromszög, melynek egyik befogója b, átfogója 2b. A másik befogót Pithagorasz tételével kapjuk: $\sqrt{3b}$, így $T_2 = \sqrt{3}b^2/2$.

Hasonlóan .$T_3 = \sqrt{3}a^2/2$

OYVΔ is derékszögű, befogói: $b+\sqrt{3}a$ és $a+\sqrt{3}b$, így: $T_{OYV} = \dfrac{\left(4ab+\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2\right)}{2}$

T4 = TOYV -T1 - T2 - T3 = ab, tehát T4 = T1. Ezt akartuk bizonyítani.

6. Csoportosítsunk:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2000}\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\ldots+\frac{2}{2000}\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{5}+\ldots+\frac{3}{2000}\right)+\ldots+\left(\frac{1999}{2000}\right)$$

A második zárójelből 1/3, a harmadikból 1/4, a k-adikból 1/(k+1) emelhető ki:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}(1+2)+\frac{1}{4}(1+2+3)+\ldots+\frac{1}{2000}(1+2+\ldots+1999)$$

A zárójelekben mindig a kiemelt nevezőnél eggyel kisebb számig áll a számok összege, ezért a *k*-adik tag: $\dfrac{1}{k+1}\cdot\dfrac{k(k+1)}{2}=\dfrac{k}{2}$

Az így kialakított összegből kiemelve 1/2-et:

$$\frac{1}{2}(1+2+3+\ldots1999)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1999\cdot2000}{2}=1999\cdot500=999500$$

7. Tekintsük a bábuk olyan kedvezőtlen fekvését, amikor egyik bábu sem azon a mezőn fekszik, amelyik számát viseli. A legrosszabb eset az, amelynél két bábu egymással helyet cserélt.

Tegyük fel, hogy az 1-es mezon a 15-ös bábu és a 15-ös mezon az 1-es bábu áll. Ebben az esetben a két bábut három húzással tudjuk megcserélni (1-es üres helyre, 15-ös a helyére, 1-es a helyére), melynek végén a két bábu a hozzájuk tartozó mezőre kerül.
Ezért, hogy mind az 50 bábut (25 párt) a helyére húzzuk, legfeljebb 3*25=75 húzás szükséges.

8. Szabolcsnak van a legkevesebb pontja, Árpáddal együtt mégis 18/2=9 pontja van. Szabolcsnak nem lehet 1 pontja, mert ő fogta a legtöbb halat, ezért 2 vagy 3 pontja van (4 nem lehet, mert akkor a másik páros egyik tagjának 4-nél kevesebb pontja lenne), Árpádnak pedig 7 vagy 6.

A másik párosnak hasonlóképpen 4 vagy 5 pontja van, hiszen ők is 9 ponton osztoznak.
Szabolcs többet fogott, mint társai, ezért legalább 3 halat zsákmányolt (ellenkező esetben a többiek közül mindenki 1 halat fogott, és az összes fogás 3 sügér lett volna). Ha Szabolcs legalább három halat fogott és legfeljebb három pontot kapott, akkor zsákmánya csak 3 durbincs lehetett.

A maradék 15 pontot elosztjuk, figyelve a következőkre:
1. Egyik horgász sem fogott két halnál többet.

2. A felosztás egyetlen lehetősége az 5, 4 és 6 pont (Árpádnak van 6 pontja).
3. A 6 pont a három sügérért járt.
Árpád 6 pontot szerzett, és mégis legfeljebb két halat fogott, amelyek között nem volt fogas. Tehát egy dévérkeszeget és egy sügért fogott.
Maradt még két sügér összesen 4 pontért. Az, akinek fogas akadt a horgára, nem foghatott több halat, mert a fogas 5 pontot ér. Így az eredmények
Árpád 6 pont (egy dévér és egy sügér), Levente 5 p. (egy fogas), Béla 4 p. (két sügér), Szabolcs 3 p. (három durbincs)