SZEGŐ GÁBOR
MATEMATIKAVERSENY
2002/2003
I. FORDULÓ - MEGOLDÁS

1. Legyen a három szám az x, y, z. Ekkor

$$\left.\begin{array}{ll} I. & x+y+z=33{,}7 \\ II. & \frac{2}{3}x=\frac{5}{8}y \\ III. & \frac{5}{12}y=\frac{7}{18}z \end{array}\right\}$$

I-be helyettesítve:

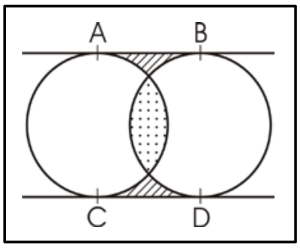
Ebből: y=11,2

x=10,5

z=12

Tehát a három szám a 10,5; 11,2; 12.

2.



Jelöljük a két kör középpontjának távolságát d-vel, a pontozott rész területét T_p- vel, a fekete rész területét T_f-vel, akkor az ABCD téglalap területe:

Így kapjuk:

$$2d=2\cdot\frac{\pi}{2}-T_p+T_f$$

$$Tudjuk, \quad hogy \quad T_p=T_f$$

3.

$[6;7;8] = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 = 168$

Ha n× 168+3 tanuló van egy iskolában, akkor 6-os, 7-es és 8-as sorokba állítva teljesül az első része. Ha a létszám 200-nál nagyobb, de 1000-nél kisebb, akkor

(1) 200 < n× 168+3< 1000

Ahhoz, hogy 9-es sorokba állítva egy tanuló se maradjon soron kívül szükséges, hogy

(2) n× 168+3 osztható legyen 9-cel

Ha n=1 1× 168+3=171, de nem teljesül az (1)-es.

Ha n=2;3;5 nem teljesül a (2)-es feltétel

Ha nagyobb 5-nél, nem teljesül az (1)-es feltétel

Ha n=4, 4× 168+3=675 9ç 675

Tehát az iskola tanulóinak létszáma 675

4.

1997^1 utolsó számjegye 7

1997^2 utolsó számjegye 9

1997^3 utolsó számjegye 3

1997^4 utolsó számjegye 1

$1997^{1997}=(1997^4)^{499\times}$ 1997^1 utolsó számjegye 7

$1997^{1998}=(1997^4)^{499\times}$ 1997^2 utolsó számjegye 9

$1997^{1999}=(1997^4)^{499\times}$ 1997^3 utolsó számjegye 3

$1997^{2000}=(1997^4)^{500}$ utolsó számjegye 1

$1997^{2001}=(1997^4)^{500\times}$ 1997 utolsó számjegye 7

$1997^{2002}=(1997^4)^{500\times}$ 1997^2 utolsó számjegye 9

Összeadjuk az utolsó számjegyeket:

7+9+3+1+7+9=36

Tehát az A szám utolsó számjegye 6.

5. ACE háromszög egyenlűszárú? AEC szög=CAE szög=j +d

BEA szög az ADE háromszög E-nél levő külső szöge

BEA szög=j +90^o

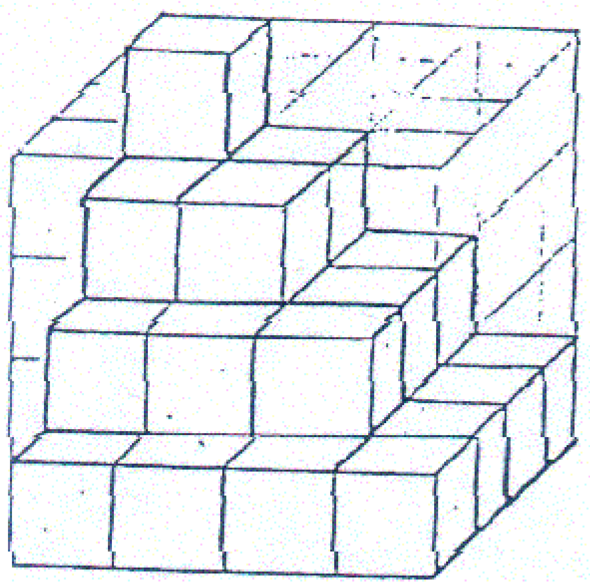
BEC szög=180^o

j +90^o+j +d =180^o

2j +d =90^o

BAC szög=90^o

6.



n=4 esetén a megmaradó test felszíne:

(1+3+5+7)+4× (1+2+3+4)+4× 4=16+40+16=72 négyzetből áll

Egy négyzet területe T=4× 4=16 (cm^2)

A=72× 16=1152 (cm^2)

n=8 esetén a megmaradó test felszíne:

(1+3+5+7+9+11+13+15)+4× (1+2+3+…+8)+8× 8=64+4× 36+64=272

négyzetből áll

Egy négyzet területe T=2× 2=4 (cm^2)

A=272× 4=1088 (cm^2)

7.

$5+5^2+5^3+5^4+5^5=3905=5\times 11\times 71$

$5^6+5^7+5^8+5^9+5^{10}=5^{5\times}(5+5^2+5^3+5^4+5^5)=5^{6\times}11\times 71$

$5^{11}+5^{12}+5^{13}+5^{14}+5^{15}=5^{10\times}(5+5^2+5^3+5^4+5^5)=5^{11\times}11\times 71$

$5^{1986}+5^{1987}+5^{1988}+5^{1989}+5^{1990}=5^{1985\times}(5+5^2+5^3+5^4+5^5)=5^{1986\times}11\times 71$

Összeadva a fenti egyenloségek megfelelo oldalait, azt kapjuk, hogy az

$A=11\times 71\times (5+5^6+5^{11}+\ldots+5^{1986})$

Látható, hogy az A osztható 71-gyel

8.

$2\times (x+y)=x\times y$ x,y természetes számok

Átalakítás után: $(x-2)\times(y-2)=4$

x-2	**y-2**
4	1
1	4
2	2
-2	-2
-1	-4
-4	-1

x=6	y=3
x=3	y=6
x=4	y=4
x=0	y=0
x=1	y=-2
x=-2	y=1