SZEGŐ GÁBOR MATEMATIKAVERSENY

2002/2003

II. FORDULÓ - MEGOLDÁS

1. A beszedett adó:

$$144+145+146+\ldots+1143=643500.$$

Mivel $643500=4500\cdot 143$, így szét tudta osztani közöttük egyenlően.

2. Első eset: 2x kg lencse, és 3x kg bab.

Hozzáadva még 2kg lencsét: 2x+2 kg, és a lencse-bab arány 3:2,azaz $\frac{2x+2}{3x}=\frac{3}{2}$.

Rendezve az egyenletet: x=0,8.

Tehát 2·0,8 kg + 2 kg = 3,6 kg lencsét, és 3·0,8 kg = 2,4 kg babot kellett szétválogatnia.

3. Mivel csak a nullának az abszolút értéke nulla, így:

$$\left|\left|x\right|-1\right|-1=0.$$

Innen $\left|\left|x\right|-1\right|=1$.

Mivel az 1-nek és a –1-nek is 1 az abszolút értéke, így két eset van:

I. eset:

$$\left|x\right|-1=1$$

$$\left|x\right|=2$$

Ebből $x_1=2$ és $x_2=-2$.

II. eset:

$$\left|x\right|-1=-1$$

$$\left|x\right|=0$$

Ebből $x_3=0$.

Tehát az egyenletnek három megoldása van : -2, 0 2.

4. Az AE_1O_1 derékszögű háromszög O_1-nél lévő szöge 60o-os, tehát ha a háromszöget az AE_1 egyenesre

tükröznénk, szabályos háromszöget kapnánk. Ebből következik, hogy $AO_1 = 2O_1E_1 = 2$ egység.

Hasonlóan az AO_2E_2 háromszögben:

$2O_2E_2 = AO_2$

$2r_2 = AM_1+r_2$

$r_2 = AM_1 = 3$ egység.

A harmadik körre:

$r_3 = AM_2 = 9$ egység $= 3^2$,

a negyedik körre:

$r_4 = AM_3 = 27$ egység $= 3^3$, azaz a körök sugara mindig a háromszorosára nő.

Így a tizedik kör sugara, ha az egységnyi sugarú kör sugara a legkisebb : $r_{10} = 3^9 = 19683$ egység.

Ha a megadott egységnyi sugarú kör a legnagyobb sugarú, akkor pedig a tizedik kör sugara 3^{-9}.

5. A keletkező test két négyzet alapú gúlából áll. A gúlák minden éle egyenlő, legyen ez b, a kocka éle pedig a.

Mivel a gúla minden éle a kocka két szomszédos lapközéppontját köti össze, így felírható a következő

Pitagorasz-tétel:

$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2$, ahonnan $b = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

A gúla magassága a kocka magasságának, azaz élének a fele.

Egy gúla térfogata:

$$V_g = \frac{T_{alap} \cdot M}{3} = \frac{b^2 \cdot \frac{a}{2}}{3} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \frac{a}{2}}{3} = \frac{a^3}{12}$$

Az oktaéder térfogata ennek a kétszerese:

$$V_o = \frac{a^3}{6}.$$

Az oktaéder és a kocka térfogatának aránya :

$$\frac{V_o}{V_K} = \frac{\frac{a^3}{6}}{a^3} = \frac{1}{6}.$$

6. Tegyük fel, hogy az A bolygóhoz legközelebb a B bolygó van, a B bolygóhoz legközelebb a C, a C-hez a D, a

D-hez az E, az E-hez az F, és az F-hez a G. Ez egyben azt is jelenti, hogy AB>BC>CD>DE>EF>FG.

Ekkor az A bolygó csillagásza a B bolygót figyeli, a B-é a C-t, stb., az F-é a G-t.

Ahhoz, hogy minden bolygót figyeljen valaki, a G bolygó csillagászának A-t kellene figyelnie. Ehhez G-nek

közelebb kellene lennie A-hoz, mint bármely más bolygóhoz, így fenn kellene állnia az FG>AG

egyenlőtlenségnek. Az előbbiek miatt viszont ekkor AB>AG is fennállna, így az A bolygó csillagásza nem

figyelhetné a B bolygót. Tehát kell, hogy legyen olyan bolygó, amit senki sem figyel.

7. 12-en szeretik a fagylaltot és a palacsintát, de közülük 2 nem szereti a matematikát, azaz 10-en szeretik

mindhármat.

A matematikát szeretők közül 7 nem szereti a fagylaltot, így a+z=7, 8 pedig a palacsintát, így a+x=8, azaz

2a+x+z=15.

Másrészt mivel mindhármat 10-en szeretik, a matematikát pedig összesen 22-en, így a+x+z=12.

E kettőből következik, hogy a=3.

Ekkor z=4, és x=5.

Ezután pedig b=18-(10+5+2)=1, ill. c=18-(10+4+2)=2.

Mivel mindenki, aki legalább egy igennel felelt szerepel az a,b,c,x,y,z,u halmazok valamelyikében, és

Pontosan egy helyen, így a legalább egy igennel felelők száma: 3+5+1+4+10+2+2=27, tehát 2 fő felelt

mindhárom kérdésre nemmel.

8. A kockák száma legyen x.

$$p = \frac{13}{72}x$$

$$f = \frac{25}{48}x$$ (1 pont)

$$z = x - \left(\frac{13}{72}x + \frac{25}{48}x\right) = \frac{43}{144}x < 1000$$

x<3348,83

Ahhoz, hogy p, f és z egészek legyenek, x-nek oszthatónak kell lennie 72-vel, 48-cal és 144-gyel.

Ezek legkisebb közös többszöröse a 144.

Másrészt mivel a nagy kocka x db kis kockából áll, x-nek köbszámnak kell lennie.

A 3348-nál kisebb, 144-nél nagyobb köbszámok: 216, 343, 512, 729, 1000, 1331, 1728, 2197 és 2744.

Ezek közül az 1728 osztható 144-gyel.

Tehát 1728 kockából áll a nagy kocka, ebből $\frac{13}{72} \cdot 1728 = 312$ a piros, $\frac{25}{48} \cdot 1728 = 900$ a fehér,

és 1728-(312+900)=516 a zöld.