SZEGŐ GÁBOR MATEMATIKAVERSENY

2003/2004

II. FORDULÓ - MEGOLDÁS

1. Anna dióinak a száma: *x*

Béla dióinak a száma: $\frac{3}{2}x$

Cili dióinak a száma: $\frac{4}{3}x$

$x + \frac{3}{2}x + \frac{4}{3}x = 46$

Innen x = 12

Tehát Anna 12, Béla 18, Cili 16 diót kap.

2. Legyen a retkek száma *x.*

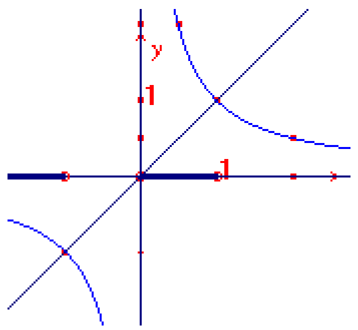
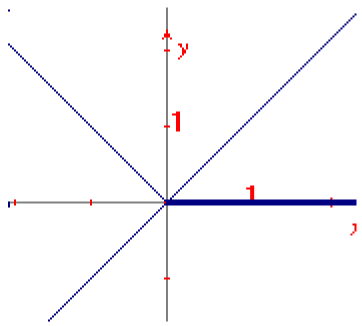
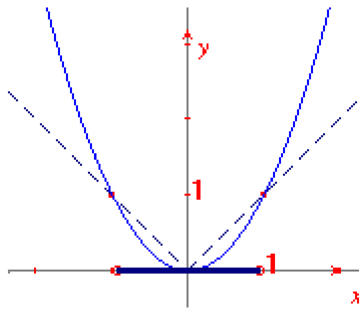
A feladat szerint a 6, a 7, a 8 osztója az *x*+1-nek.

Így az *x*+1 a $[6;7;8]$ valamilyen pozitív egész számú többszöröse.

$[6;7;8] = 168$

Mivel *x* kisebb 500-nál, *x*+1 lehetséges értékei: $1 \cdot 168 = 168$ és 2× 168 = 336

A kosárban vagy 167, vagy 335 darab retek van.

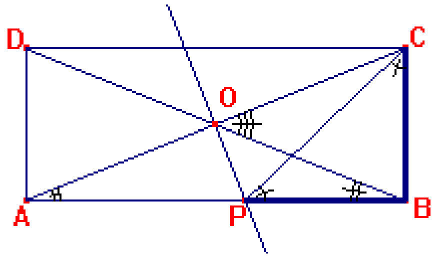
3. 		
x < -1vagy $0 < x < 1$	$x \geq 0$	-1 < x < 0 vagy 0 < x < 1

4. a) Nem, mert a számjegyeinek az összege 3, így osztható 3-mal.

b) Akármelyik az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek pontosan egyszeri felhasználásával alkotott 6 jegyű számot is tekintjük, a számjegyek összege mindig ugyanannyi: $1+2+3+4+5+6=21$. 3|21, emiatt ezen számok egyike sem prímszám.

5. Legyen n a kocka élének a hossza centiméterekben mérve.
Pontosan 3 lapja piros a kocka csúcsaiban levő kiskockáknak. Ezek száma 8.
Pontosan két lapja piros a kocka élei mentén elhelyezkedő azon kiskockáknak, amelyek nem csúcsban vannak. Egy él mentén ezek száma *n*-2. Mivel a kockának 12 éle van, a számuk összesen: $12 \cdot (n-2)$.
A feltétel szerint: $12 \cdot (n-2) = 12 \cdot 8$ Innen $n = 10$
A kocka éle 10cm.

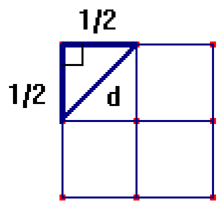
6.



Mivel a CPB háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög, így a CPB $\angle$ =45°. Az APC $\angle$ ennek kiegészítő szöge, ezért 135°-os. Mivel az OP egyenese az AC szakasz felezőmerőlegese, ezért az APC háromszög is egyenlő szárú.

Emiatt CAP $\angle = \dfrac{180° - 135°}{2} = 22{,}5$°.
Az AOB háromszög szintén egyenlő szárú, így ABO $\angle = 22{,}5$°. Az átlók által bezárt szög ennek a háromszögnek külső szöge, tehát BOC $\angle = 22{,}5° + 22{,}5° = 45°$.

7.



Bontsuk fel a négyzetet a szemközti oldalak felezőpontjainak az összekötésével 4db egybevágó $\frac{1}{2}$ oldalú kis négyzetre! Mivel 5 pontot kell elhelyeznünk, minden esetben lesz legalább egy olyan kis négyzet, amelybe legalább 2 pont esik. Két, ugyanabban a kis négyzetben levő pont akkor van a legtávolabb egymástól, ha az egyik átló két végpontjában vannak. $d = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ez a maximális távolság.

Így mindig van az 5 között 2 olyan pont, amelyek távolsága nem nagyobb $\frac{\sqrt{2}}{2}$ -nél.

8. a) A feladat szerint, ha 29 golyót veszünk ki, még nem biztos, hogy mind a 4 szín szerepel a kiválasztott golyók között. Ez úgy lehetséges, hogy mind a 29 golyót a három magasabb elemszámú színből választjuk, a legkisebb elemszámúból pedig egyet sem. A legkisebb elemszám tehát: 36-29 = 7. Azaz mindegyik színből legalább 7 golyó kell, hogy legyen.
b) Egy színből akkor lehet a legtöbb golyó, ha a többi három színből a lehető legkevesebb, azaz 7db van. A legnagyobb lehetséges elemszám tehát: $36 - 3 \cdot 7 = 15$. Legfeljebb 15 golyó lehet egy színből.