SZEGŐ GÁBOR

MATEMATIKAVERSENY

2004/2005

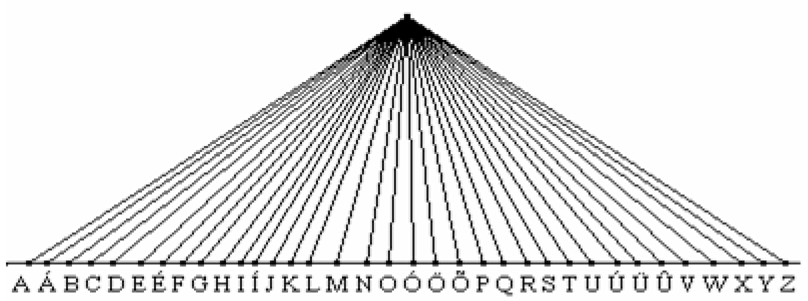
I. FORDULÓ - MEGOLDÁS

1. Legyen a lányok szám n. Az első lány 1 + 5 = 6, a második 2 + 5 = 7, stb.. Így az n. lány n + 5 fiúval táncolt, és ez a fiúk száma is. Ezek alapján n + n + 5 = 57. Ebből n = 26.

Tehát 26 lány és 31 fiú vett részt a mulatságon.

2. A legfelső pont mindegyik D-nek csúcspontja lesz.

A megadott 35 pontból (A-Z-ig) kell kettőt kiválasztani az öszes lehetséges módon a sorrendre való tekintet nélkül. Minden pont mellé 34 másik pont választható ki. Így 35*34 lehetőség van, de minden esetet kétszer vettünk figyelembe. Ezért ezt még el kell osztani kettővel. Tehát 595 háromszög látható az ábrán.



3. p = k * 24 + m, ahol p prím; m természetes szám és nem kisebb 0-nál és nem nagyobb 23-nál.

a) ha p nem nagyobb 24-nél, akkor k = 0 és m = p. Tehát a maradék prímszám.

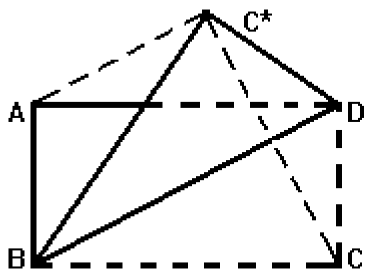
b) ha p > 24, akkor k nem kisebb1-nél.

Ekkor m nem lehet páros (nem lehet 0-; 2-; 4-; 6-; 8-; 10-; 12-; 14-; 16; 18; 20; 22), mert 24k és m is páros. Ebből pedig az következik, hogy p is páros, ami lehetetlen.

m nem lehet osztható 3-mal sem (nem lehet 3; 6; 9; 12; 15; 18; 21), mert 24k és m is osztható 3-mal. Ekkor p is osztható 3-mal, ami nem lehet. Így a lehetséges maradékok értéke:

m = 1; 5; 7; 11; 13; 17; 19 és 23 lehet. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

4. C* rajta van az AD felezőmerőlegesén, mivel AC* = DC*. Így C* illeszkedik a BC felezőmerőlegesére is. Ebből következik, hogy BC* = CC*. A feltételek miatt BC = BC*. Tehát BCC*D szabályos. A BD átló a B csúcsnál lévő 60^o-os szöget felezi, mert a BD egyenes a CC* szakasz felező merőlegese (BC = BC* és DC = DC*). A BCD derékszögű háromszögben BD átfogó a DC befogó kétszerese (szabályos D fele), tehát BD = 12 cm. Alkalmazva a Pitagorasz-tételt:

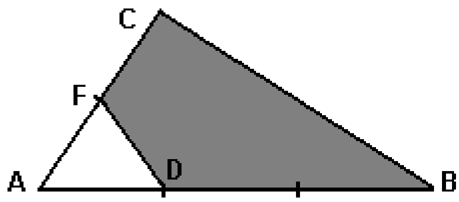


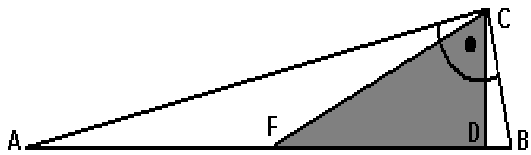
$BC^2 = 12^2 – 6^2 = 108$

AD = BC = $\sqrt{.08} = 6\sqrt{3}$ » 10,39 cm.

5. Először k_1 (0 < k_1 és k_1 nem nagyobb18-nál) számú lapot darabolunk 10-10 részre. Ekkor $10k_1$ + 18 - k_1 = 18 + $9k_1$ számú lap lesz. Majd ezekből k_2 számút választunk ki és darabolunk 10-10 részre. Ekkor $10k_2$ + 18 + $9k_1$ - k_2 = 18 + 9(k_1 + k_2) számú lap lesz. Az lejárást folytatva látható, hogy a lapok darabolását n-szer ismételve a papírlapok száma 18 + 9(k_1 + k_2 1 + k_n) = 2004. Átrendezés után 9(k_1 + k_2 1 + k_n) = 1986. Ez lehetetlen, mert 1986 nem osztható 9-cel. Így a számlálás helytelen volt.

6. Jelölje az ABCD területét t. Ekkor az ADCD területe t/3, mert a két háromszög magassága közös, és az alapok aránya pedig 3 **:** 1. Hasonlóan az ADFD területe fele az ADCD területének, tehát a területe t/6. Így a befestett DBCF négyszög területe (5t)/6. Ez az ADFD területének 5-szöröse





7. A feladat feltétele szerint AB = 4CD. Az FC súlyvonal a Thalész-tétel alapján (1/2)AB = 2CD. Így Az FDCD derékszögű és egy szabályos háromszög fel, amelynek az F csúcsánál van a 30^o-os szöge. Ez a szög külső szöge az AFC egyenlőszárú háromszögnek (AF = FC = 2CD). Tehát az A csúcsnál lévő szög 15^o-os, így a B-nél lévő 75^o-os. Az eredeti derékszögű háromszög hegyes szögeinek aránya: 75^o **:** 15^o = 5^o **:** 1.

8. Legyen a és b az első két kilométerköveken létható két számjegy.

Az 1. kövön az ab,

a 2. kövön a ba és

a harmadik kövön a0b vagy b0a szám látható.

Mivel a robogó egyenletesen mozog, az 1 óra alatt megtett utak egyenlők.

$$10b + a - (10a + b) = 100a + b - (10b + a) \qquad (1)$$

vagy

$$10b + a - (10a + b) = 100b + a - (10b + a) \qquad (2)$$

(1)-ből rendezéssel kapjuk: $18b = 108a$, azaz $b = 6a$.

Innen – figyelembe véve, hogy a és b számjegyek – csak $a = 1$ és $b = 6$ lehetséges. Ekkor a robogó sebessége: $61 - 16 = 45$, a sebesség tehát 45 km/h.

(2)-ből $-9a = 81b$, amelyből nem kapunk megoldást.