SZEGŐ GÁBOR

MATEMATIKAVERSENY

2004/2005

II. FORDULÓ - MEGOLDÁS

1. Legyen a kétjegyű szám. Ekkor $10a + b = 3a + 3b$, azaz $7a = 2b$. Ebből látszik, hogy b osztható 7-tel. Csak $b = 7$ lehetséges, mert b számjegy. Ezt az egyenletbe írva $a = 2$ adódik. Tehát a kétjegyű szám a 27.

2. Legyen a vásárlás után a libák száma x, a birkáké y! Ekkor persze $x + y = 20$ és $2x + 4y = 60$. Az első egyenlet kétszeresét a másodikból kivonva $2y = 20$, azaz $y = 10$-et kapunk. Ezt az első egyenletbe beírva $x = 10$ azonnal adódik. Tehát $10 : 5 = 2$ birkát cserélt el a juhász, így eredetileg 12 juh alkotta a nyáját.

3. Vegyük észre, hogy $25 + 144 = 169$, azaz a Pitagorasz-tétel megfordítása miatt OAQ szög derékszög. Így az OAQ háromszög területe: $5*(12/2) = 30$. AB épp ebben a háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság kétszerese. Ha a magasság x, akkor ezek szerint $13*(x/2) = 30$, ahonnan $x = 60/13$. Eszerint $AB = 120/13$.

4. Legyen x az a szám, melyet úgy kapunk, hogy a keresett szám utolsó két jegyét (az 1-et és a 6-ot) töröljük! Ekkor a keresett szám $100x + 16$, ami ugyanott minimális, ahol x minimális. Így csak x-et kell meghatározni. Az x szám jegyeinek összege 9, hisz ehhez a jegyösszeghez 1-et és 6-ot, vagyis összesen 7-et adva 16-ot kell kapnunk a feladat feltételei szerint. Ahhoz, hogy a keresett szám 16-tal osztható legyen, annak kell teljesülnie, hogy x 4-gyel osztható, hiszen $100x + 16$ pontosan akkor osztható 16-tal, ha 100x is, azaz ha x osztható 4-gyel. Keressük tehát azt a legkisebb x számot, mely jegyeinek összege 9, továbbá osztható 4-gyel. Az egyjegyűek közül csak a 9 felel meg az első feltételnek, de az nem osztható 4-gyel. Így x legalább kétjegyű. Az első feltételnek megfelelő három legkisebb szám a 18, 27 és a 36. Ezek közül csak a 36 osztható 4-gyel, így $x = 36$. Tehát a keresett szám a 3616.

5. Írjuk fel a sorozat első néhány elemét! 3, 1, -2, -3, -1, 2, 3, 1. Vegyük észre, hogy újra a 3, 1 következett, mint két szomszédos elem, így a feltételek itt ugyanazok, mint a sorozat elején, a 3, 1, -2, -3, -1, 2 periódus fog ismétlődni. Ez a periódus hatelemű, a 2004 pedig osztható 6-tal, tehát a 2004. elem épp a periódus utolsó eleme lesz, azaz 2.

6. Legyen a számláló 7x, a nevező pedig 5x! Ekkor $7x + 5x = 12x$ egy háromjegyű köbszám. Mivel 12 osztható $6 = 2\times3$-mal, így a köbszám prímtényezői között ott lesz a 2 és a 3. Tehát a köbszám osztható $2*2*2\times3*3*3 = 216$-tal. Ha nem a 216 lenne a keresett szám, akkor köbszám lévén ennek legalább 8-szorosa, azaz legaláb1728 lenne, tehát nem lehetne 3-jegyű. Így a keresett köbszám a 216. Ezek szerint $12x = 216$. Ebből $x = 18$, így a tört 126/90.

7. A gondolatban így feldarabolt kockában a csúcsok, illetve az élek mentén elhelyezkedő kiskockáknak 3 illetve 2 lapja illeszkedik az eredeti kocka oldallapjaira. Az oldallapok, illetve a kocka belsejében elhelyezkedő kiskockáknak 1, illetve 0 lapja illeszkedik az eredeti kocka lapjaira. Így a „lyukas" test a nagy kocka élei és csúcsai mentén elhelyezkedő kiskockákból áll. Ennek a testnek a felszíne összetevődik a 12 él mentén elhelyezkedő 8 egység magas, egységnyi alapterületű négyzetes oszlop palástjának felszínéből és az ezekhez csatlakozó, a kocka csúcsaiban lévő kiskockák „szabad" felszínéből. A lyukas test felszíne: Alt= $(12\times4\times8 + 8\times3)$ te = 408 te. Az eredeti kocka felszíne: Ak = 6a2 = 6×102 te = 600 te. A lyukas test és az eredeti kocka felszínének aránya: .

8.

Legyen szög(ACD) = a, szög(BCE) = b. Ekkor a + b = 45 fokés szög(ECD) = = 90 fok- (a + b) = 90 fok - 45 fok = 45 fok. Tükrözzük CD egyenesére CA-t, így kapjuk meg a CP szakaszt. Szög(PCD) = a a tükrözés miatt, így szög(PCE) = 45 fok - a = b; továbbá PC = AC = BC miatt PC = BC. Tehát PC egyúttal BC tükörképe is CE egyenesére. Eszerint a P pont egyszerre tükörképe A-nak CD egyenesére és B-nek CE egyenesére. Így AD tükörképe CD egyenesére PD, BE tükörképe CE egyenesére PE. Mivel a tükrözés szögtartó, szög(CPD) = szög (CAD) = 45o és szög(CPE) = szög(CBE) = 45 fok. Tehát EPD olyan derékszögű háromszög, melynek befogói éppen BE-vel és AD-vel megegyező hosszúságúak, átfogója pedig DE. A Pitagorasz-tételt alkalmazva erre a háromszögre éppen a feladat állításához jutunk