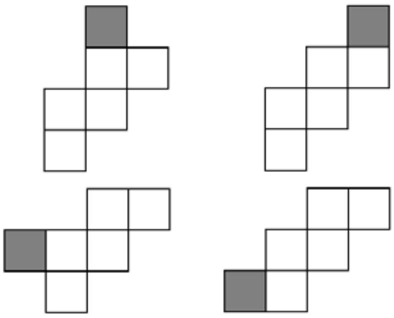
SZEGŐ GÁBOR

MATEMATIKAVERSENY

2005/2006

I. FORDULÓ - MEGOLDÁS

1. A feladatnak 4 megoldása lehetséges, mert a hiányzó négyzet mind a négy oldaléle mentén csatlakozhat a megadott hálózathoz.



2. Legyen az egység a rácsnégyzet oldalának hossza. A négyszöget az AC átlója mentén vágjuk két háromszögre. A háromszögek közös AC oldala 8 egység hosszúságú. Az ABCD-ben ehhez a közös oldalhoz tartozó magasság 3 egység. Így t_{ABC} = (8*3)/2= 12 területegység. Hasonlóan az ACDD-re: t_{ACD} = (8*3)/2= 12 területegység.

Ebből a négyszög területe t = t_{ABC} + t_{ACD} = 24 területegység.

Tehát a négyszög területe 24-szerese a rácsnégyzet területének.

3. Ha a 7 cipót 3 személy között testvériesen osztjuk szét, akkor egy embernek 7/3 cipó jut. Az egyik vadásznak 3 cipója volt, így ő 3 - (7/3)= 2/3 cipót adott a turistának. A másik vadásznak 4 cipója volt, így neki 4 - (7/3)= 5/3 cipót kellett adnia. Ketten tehát 2/3+5/3= 7/3 cipót adtak a turistának, amelyért ő 7 petákkal fizetett.

Így az első vadász, akinek 3 cipója volt, 2 petákot kapott, mert ő 2/7 cipót adott. A másik vadász pedig 5 petákot tett el, mert ő 5/7 cipót adott.

4. Az n. (n pozitív természetes szám) sorban az utolsó szám az n^2. (Nem kell bizonyítani.)

Mivel $44^2 = 1936 < 2005 < 2025 = 45^2$. Így a 2005 a 45. sorban áll. A 2005 a 45. sor (2005 – 1936 =) 69. eleme. Tehát a keresett szám a 44. sor 68. eleme.

Ez a szám $43^2 + 68 = 1917$.

5. Az ábra jelöléseit felhasználva az egyik téglalap területe $t_1 = y(a – x) = ay - xy$.

A másik téglalapé $t_2 = x(b – y) = bx - xy$. Az x és y oldalú téglalap hasonló az eredeti, a és b oldalú téglalaphoz, mert az eredeti téglalap a kis téglalapból (a/x arányú) nagyítással állítható elő.

Ekkor a megfelelő oldalak aránya is egyenlő a két téglalapban: $a : b = x : y$. Ebből átrendezéssel következik, hogy $ay = bx$.

Az egyenlőség mindkét oldalából kivonva xy - t, akkor a bizonyítandó állítást kapjuk: $ay - xy = t_1 = t_2 = bx - xy$

6. Egy szám 12-vel való oszthatóságának feltétele, hogy a szám osztható legyen 3-mal és 4-gyel is. (12 = 3 * 4 és a 3 és a 4 relatív prímek)

A hárommal való oszthatóság feltétele mindenképpen teljesül, mert 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 39 = 3*13.

4-gyel akkor osztható egy szám, ha az utolsó két számjegyéből képzett kétjegyű szám osztható 4-gyel.

Adott számjegyekből álló szám akkor a legnagyobb, ha a lehető legnagyobb számjegyek állnak a legnagyobb helyiértékű helyeken.

Kezdjük a számot a lehető legnagyobb számjegyekkel: 987¼ . Az így elkezdett szám a lehető legnagyobb lesz.

A 6-os számjeggyel azonban nem folytatható a számunk, mert sem az 54, sem a 45 nem osztható 4-gyel.

A következő legnagyobb szám az 5-ös. Ez jó is lesz, mert 46 és a 64 közül a 64 osztható 4-gyel.

Így a keresett szám: 987564.

7.

a) Az eredeti kocka $7^3 = 343$ kis kockából áll.

Ebből eltávolítunk $5^{2\times} 7 + 2(3^2 + 1) = 195$ kis kockát. Így a lyukas test 343–195 = 148 kis kockából áll.

A legnagyobb keresztmetszetű furat peremén lévő kockáknak 3 oldala festett. Ezek száma: 2(14 + 10) = 48.

A kisebb keresztmetszetű furatok oldalai mentén lévő kis kockáknak is 3 oldala festett. Ezek száma: 2(3× 4 + 4) = 32.

Tehát 80 olyan kis kocka van, amelynek 3 lapja festett.

A lyukas test feldarabolásával keletkező kis kockáknak vagy 2, vagy 3 oldala festékes.

Így azoknak a kis kockáknak a száma, amelyek pontosan két lapja festett 148 – 80 = 68.

b) vagy össze is lehet számolni

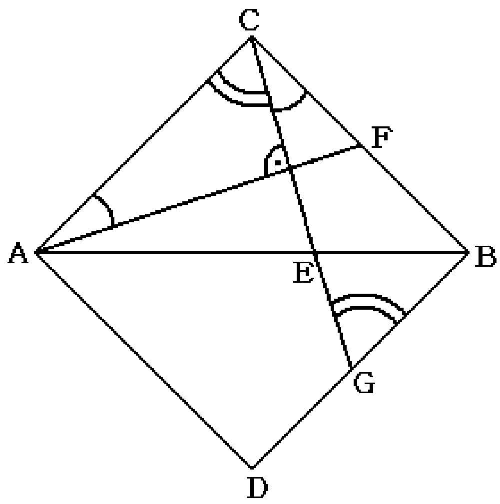
Azokon az oldallapokon, amelyiken a legnagyobb keresztmetszetű furat van, nincs olyan kis kocka, amelynek 2 oldala lenne festett.

Azokon az oldallapokon, amelyiken a közepes keresztmetszetű furat van, 2(4 + 10) = 28 kis kockának van két festett oldala.

Azokon az oldallapokon, amelyiken a legkisebb keresztmetszetű furat van, 2(25 – 5) = 40 kis kockának van két festett oldala.

Így összesen 28 + 40 = 68 olyan kis kocka van, amelyiknek pontosan két oldala festett.

8.



Egészítsük ki az ABC háromszöget ACBD négyzetté. (A négyzet oldala legyen 2a.) A CE szakasz meghosszabbítása a G pontban metszi a négyzet BD oldalát.

Az ábrán az azonos módon jelölt szögek egyenlők.

Az ACFD @ CBGD (egy oldal és a rajta lévő két szög), ezért CF = BG = a.

BEGD ~ AECD (szögeik egyenlők), a hasonlóság aránya 1 : 2, mivel AC = 2a = 2CF = 2BG.

AB = 2a$\sqrt{2}$. AE = (2/3)* AB = $\frac{4a\sqrt{2}}{3}$.

A keresett arány: AE : CF = $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.