SZEGŐ GÁBOR

MATEMATIKAVERSENY

2005/2006

II. FORDULÓ - MEGOLDÁS

1. A tábor legfeljebb annyi napig tarthatott, ahányféleképpen leülhet a hat barát a négy- és a kétszemélyes csónakokba. Vagyis ahányféleképpen kiválaszthatunk 6 elemből kettőt $\left(\binom{6}{2}=15\right)$ úgy, hogy nem vagyunk tekintettel a kiválasztás sorrendjére.

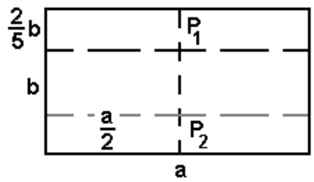
Az első ember az őt követő öt ember mindegyikével beülhet a kétszemélyes csónakba.
Ez 5 eset.
A második az őt követő 4 ember mindegyikével beülhet a kétszemélyes csónakba.
Ez 4 eset.
A gondolatmenetet folytatva még további 3, 2 és 1 esetet kapunk.
Ezek összege: 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15.
Tehát a tábor legfeljebb 15 napos lehetett.

2. A feladatban szereplő háromszögek egyik oldala a téglalap egyik megfelelő oldala, az oldallal szemközti csúcs pedig a téglalap belsejében felvett pont. Az ábra jelöléseivel a téglalap területe: $t_t = ab$.

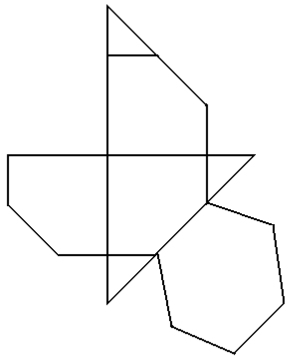
Legyen *a* annak a háromszögnek az egyik oldala, amelynek a területe a téglalap területének ötöde. Az *a* oldallal szemközti csúcs csak a téglalap belsejében az *a* oldallal párhozamos, tőle $\frac{2}{5}b$ távolságra lévő egyenesen lehet. Hiszen az így keletkező háromszög egyik oldala *a,* a hozzá tartozó magasság $\frac{2}{5}b$, a háromszög területe pedig: $t_D = 0{,}5 \times a\frac{2}{5}b = \frac{1}{5}ab$.

Hasonló gondolatmenet alapján annak a két háromszögnek, amelynek a területe a téglalap területének a negyede, a téglalap belsejében lévő csúcsa csak az *a* oldal felezőmerőlegesén lehet. (A *b* oldal felezőmerőlegese nem lehet, mert az párhuzamos az *a* oldaltól $\frac{2}{5}b$ távolságra lévő, *a*-val párhuzamos egyenessel. Így ezeknek nincs közös pontjuk.) A két egyenes metszéspontja P_1.

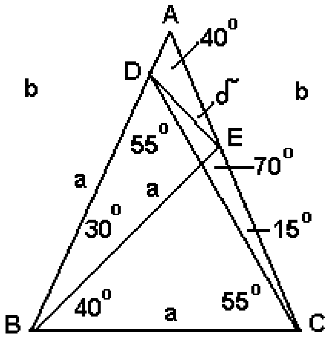
A *b* oldal felezőmerőlegesére vonatkozó tengelyes szimmetria miatt a P_2 pont is megfelelő lesz. Az előzőekhez hasonlóan még két pontot találhatunk, ha a téglalapnak nem az *a* oldala, hanem a *b* oldala lesz az $\frac{1}{5}ab$ területű háromszög oldala. Így összesen 4 olyan pont van, amely a feladat feltételeinek megfelel.



3. A hatszög szabályos, mert minden oldala egybevágó derékszögű háromszögek átfogója.
Az ábrán egy lehetséges megoldást szemléltettünk.
(Vigyázat, mert a derékszögű háromszögek nem akárhová csatlakoztathatók!)



4. Használjuk az ábra jelöléseit!



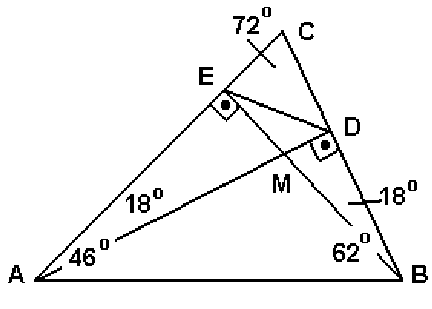
A BCED egyenlő szárú, mert az E és a C csúcsnál lévő szögek 70°-osak. Tehát BE = BC = a.

A BCDD egyenlő szárú, mert a D és a C csúcsnál lévő szögek 55°-osak. Tehát BD = BC = a.

Ezt összevetve azt kapjuk, hogy BE = BC = BD = a. Tehát BEDD is egyenlő szárú, amelynek az alapon lévő szögei 0,5(180° - 30°) = 75°-osak.

A háromszög külső szöge egyenlő a nem mellette lévő két belső szög összegével. Így az ADED-ben 75° = 40° + d. Ebből a keresett szög d = 35°.

5. Használjuk az ábra jelöléseit!

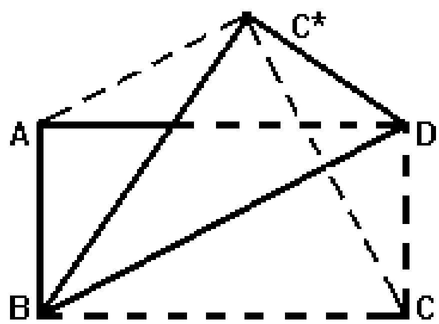


Az ADCD ~ BECD-höz, mert szögeik egyenlők. Így a megfelelő oldalak aránya a két háromszögben egyenlő: CD : AC = CE : BC. Ebből azt kapjuk, hogy CD : CE = CA : CB. Az ABCD ~ DECD-höz, mert két-két oldal aránya és az általuk közbezárt szög a két háromszögben egyenlő. Ekkor a megfelelő szögek is egyenlők. Így a CDED-ben az E csúcsnál lévő szög 62°, a D csúcsnál lévő pedig 46°.

6. A 17 és a 23 kétjegyű többszörösei: 17; 34; 51; 68; 85 illetve 23; 46; 69; 92. Látható, hogy a számok utolsó számjegyei csak egyszer fordulnak elő a felsorolásban.

A feladatban szereplő 2005 jegyű számot írjuk fel a legkisebb helyiértéktől haladva a nagyobbak felé. A feltételek szerint az utolsó számjegy az 1. Az 1-es elé csak az 5-ös választható, hogy bármely két szomszédos számjegyet kétjegyű számmá összeolvasva 17-tel vagy 23-mal osztható számot kapjunk. Az 5-ös elé csak a 8-as. A gondolatmenet alapján folytassuk a szám felírását: ...4692346 $\overline{92346}$851. Vegyük észre, hogy az utolsó 3 számjegytől eltekintve a 9, 2, 3, 4 és 6 (tehát 5 db számjegy) ismétlődik. Mivel $2005 - 3 = 400 \times 5 + 2$, ezért a keresett számjegy az ismétlődő számjegyek közül visszafelé haladva a 2. számjegy, azaz a 4-es.

7. A lyukas test felszínét a testet határoló „külső” és „belső” oldallapok területeinek az összege adja. Kívülről befelé haladva számoljuk össze a határoló lapok területeit!
A lyukas test felszíne:
$A_L = (2(36 + 84 + 96) + 2(4\times4 + 4\times2) + 2(64 + 76))\ cm^2 = 760\ cm^2$.
A kocka térfogata :$V_K = 10^3\ cm^3$.
Az eltávolított részek térfogata: $V = (8^2\times10 + 2\times4^2\times1 + 2\times2^2\times1)\ cm^3$. A lyukas test térfogata: $V_L = V_K - V = (1000 - 680)\ cm^3 = 320\ cm^3$.



8. C* rajta van az AD felezőmerőlegesén, mivel AC* = DC*. Így C* illeszkedik a BC felezőmerőlegesére is. Ebből következik, hogy BC* = CC*. A feltételek miatt BC = BC*. Tehát BCC*D szabályos. A BD átló a B csúcsnál lévő 60^o-os szöget felezi, mert a BD egyenes a CC* szakasz felező- merőlegese (BC = BC* és DC = DC*). A BCD derékszögű háromszögben BD átfogó a DC befogó kétszerese (szabályos D fele), tehát BD = 12 cm. Alkalmazva a Pitagorasz-tételt: $BC^2 = 12^2 - 6^2 = 108$.

AD = BC = $\sqrt{108} = 6\sqrt{3}$ » 10,39 cm.

Szorgalmi feladat: Vizsgálj meg egy szokásos dobókockát, és írd le minél több tulajdonságát az oldalain lévő számok alapján!
(Pl.: A szemközti oldalakon lévő számok összege minden esetben 7.)