SZEGŐ GÁBOR MATEMATIKAVERSENY 2006/2007.

AZ I. FORDULÓ megoldása

1. Ha egy kannából 40 %-nyi hiányzik, akkor 40 deciliterrel több van benne, mint ha 40%-áig van megtöltve. Hány literes a kanna?

Legyen V a kanna térfogata.

$$V\frac{60}{100} = 4 + V\frac{40}{100} \text{ Ebből}$$

$$V = 20$$

A kanna 20 l-es.

2. A $\overline{80x24y5}$ hétjegyű számhoz hány olyan (x; y) számpárt találni, hogy a szám osztható legyen

a) 25-tel; b) 12-vel?

a) Egy szám akkor osztható 25-tel, ha az utolsó két számjegyéből képzett kétjegyű szám osztható 25-tel. (00-ra, 25-re, 50-re, 75-re végződik)
Így az y lehetséges értékei: 2 és 7.
Az x értéke nem befolyásolja a szám 25-tel való oszthatóságát.
Tehát x lehetséges értékei: 0; 1;…;9.
A keresett számpárok száma: $2 \cdot 10 = 20$.

b) Ha szám osztható 12-vel, akkor szám páros.
A $\overline{80x24y5}$ hétjegyű szám páratlan.
Így nincs olyan (x; y) számpár amelyre a megadott szám osztható lenne 12-vel.

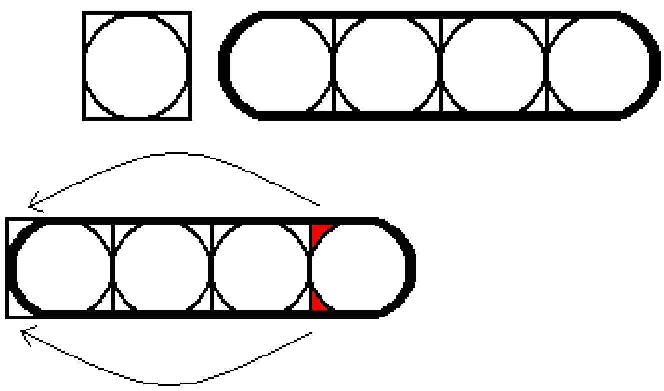
3. Mennyi a $\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2006}\right)$ kifejezés értéke?

A zárójelben lévő kifejezések közös nevezőre hozásával alakítsuk át a kifejezéseket:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2006}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2006}{2005}\cdot\frac{2007}{2006}$$

Egyszerűsítés után $\frac{2007}{2} = 1003{,}5$-et kapunk.

4. Az ábrán látható mindegyik kör területe *k*, a négyzeté *n*. Mekkora a vastag görbével határolt terület?



A befestett rész áthelyezésével a 3 négyzetté és egy körré darabolhatjuk át az alakzatot.
Így a keresett terület: $3n + k$

5. Határozd meg a következő szám utolsó tizenkét számjegyének az összegét!

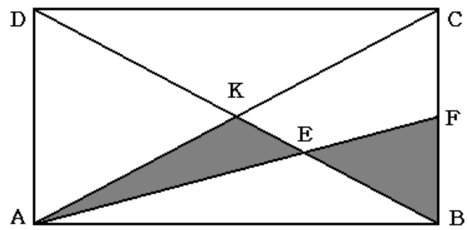
SZEGŐ GÁBOR MATEMATIKAVERSENY 2006/2007.

AZ I. FORDULÓ megoldása

$$\mathbf{A = 10^{11} + 20^{11} + 30^{11} + 60^{11}}$$

Alakítsuk át a kifejezést:
$A = (1\cdot10)^{11} + (2\cdot10)^{11} + (3\cdot10)^{11} + (6\cdot10)^{11} = 1\cdot10^{11} + 2^{11}\cdot10^{11} + 3^{11}\cdot10^{11} + 6^{11}\cdot10^{11} =$
$= 10^{11}(1 + 2^{11} + 3^{11} + 6^{11})$
Tehát az A szám 11 db nullára végződik.
Így az $1 + 2^{11} + 3^{11} + 6^{11}$ szám utolsó számjegyét kell már csak meghatározni.
Ez a számjegy az A szám utolsó tizenkét számjegyének az összegével azonos.
A 2 hatványainak utolsó számjegye szabályosan ismétlődik, amely alapján 2^{11} utolsó számjegye 8.
Hasonlóan határozhatjuk meg a 3^{11} és 6^{11} utolsó számjegyét is.
A keresett számjegy az$1 + 8 + 7 +6 = 22$ szám utolsó számjegye.
Tehát az A szám utolsó tizenkét számjegyének az összege 2.

6. Az ABCD téglalap BC oldalának felezőpontja F. Határozd meg az ábrán szürkére festett két háromszög területének arányát!



Az ABK∆ és az ABF∆ területe egyenlő,
mert az AB alapjuk közös és mindkét háromszög magassága a téglalap BC oldalának fele.

$$t_{ABK} = t_{AEK} + t_{ABE} = t_{BFE} + t_{ABE} = t_{ABF}$$

Ebből $t_{AEK} = t_{BFE}$.

Tehát a két szürkére festett háromszög területének aránya 1.

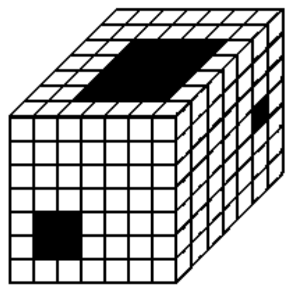
7. Bizonyítsd be, hogy ha a p prímszámot elosztjuk 24-gyel, akkor a maradék 1, vagy prímszám!

Ha $p \le 24$, akkor az állítás igaz, mert a maradék p lesz.

Ha $p > 24$, akkor $p = 24k + m$, ahol $k, m \in \mathbf{Z}^+$ és $1 \le m \le 23$.
m páros nem lehet, mert akkor $p = 24k + m$ páros szám, és így p nem lenne prímszám.
Tehát $m \neq 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20; 22$.

m nem lehet 3n alakú sem, akkor $p = 24k + m$ osztható lenne 3-mal.
Tehát $m \neq 3; 6; 9; 12; 15; 18; 21$.
Így m lehetséges értékei: 1; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23.

8. Egy 7 egység oldalélű kockát az ábrán látható módon 3 irányból keresztülfúrunk. Az így kapott testet festékbe mártjuk, majd a vonalak mentén 1 egység oldalélű kis kockákra vágjuk szét. Hány kis kockának lesz pontosan egy lapja festett?



Számoljuk össze a lyukas kocka „külső” és „belső” felületén a feltételeknek megfelelő kis kockákat!
Az első lapon 2 ilyen kockát találunk.

SZEGŐ GÁBOR MATEMATIKAVERSENY 2006/2007.

AZ I. FORDULÓ megoldása

A jobb oldalon 2 db.
A felső lapon 1 db.
Az alsó lapon nincs.
A bal oldali lapon 12 db.
A hátsó lapon 14 db.
A „belső” felületen a legnagyobb lyuk bal illetve a hátsó oldalát vizsgálva találunk még 8 db illetve 6 db kis kockát.
A fenti két oldal találkozásánál futó él mentén még 1 darabot.
Ez összesen 46 db.