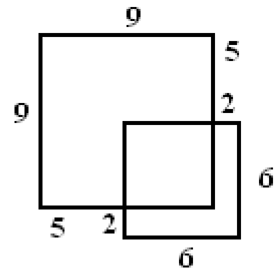
SZEGŐ GÁBOR MATEMATIKAVERSENY 2006/2007.

AZ II. FORDULÓ ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓJA

1. Egy 9 egység és 6 egység oldalhosszúságú négyzet egy 4 egység oldalhosszúságú négyzetben fedi egymást. Rajzold le a négyzeteket! Hány területegység a keletkezett sokszög területe? Hány egység hosszú a keletkezett sokszög kerülete?

A sokszög területét megkapjuk, ha a két négyzet területének összegéből levonjuk a közös rész területét:
t = 81 + 36 – 16 = 101 területegység.
A sokszög kerülete az ábra alapján:
k = 18 + 10 +4 +12 = 44 hosszúságegység.



2. A $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ számkártyákból kirakunk egy négyjegyű számot.

Mi a valószínűsége annak, hogy a szám

- **a) páratlan?**
- **b) 4000-nél nagyobb?**
- **c) 6-tal osztható?**

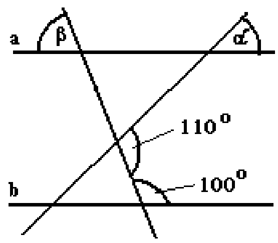
Először határozzuk meg az összes esetek számát:
Az első helyre 4, a másodikra 3, a harmadikra 2, a negyedikre 1 kártyából választhatunk. Így az össze esetek száma: $4\cdot3\cdot2\cdot1 = 24$.

a) Egy szám akkor páratlan, ha utolsó számjegye páratlan. Így a négyjegyű szám utolsó számjegye 3 vagy 5 lehet. Ilyen számokból annyi van, ahányféleképpen az első három számot sorba rakhatjuk. Ezek száma: $2\cdot(3\cdot2\cdot1) = 12$.
Így a keresett valószínűség $\frac{12}{24} = 0{,}5$.

b) Egy négyjegyű szám akkor nagyobb 4000-nél, ha az első számjegye legalább 4. Így a szám 4-gyel vagy 5-tel kezdődhet. Ilyen számokból annyi van, ahányféleképpen az utolsó három számot sorba rakhatjuk. Ezek száma: $2\cdot(3\cdot2\cdot1) = 12$.
Így a keresett valószínűség $\frac{12}{24} = 0{,}5$.

c) Egy szám akkor osztható 6-tal, ha osztható 2-vel és 3-mal. A képezhető négyjegyű számok egyikesem osztható 3-mal, így a keresett valószínűség 0.

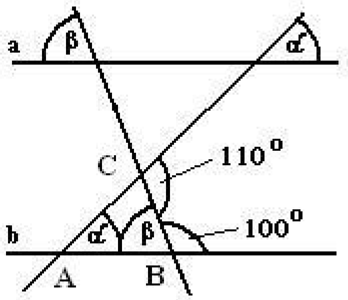
3. Az *a* és *b* párhuzamos egyeneseket két másik egyenessel az ábrán látható módon elmetszettük. Határozd meg az α és a β szögeket!



SZEGŐ GÁBOR MATEMATIKAVERSENY 2006/2007.

AZ II. FORDULÓ ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓJA

Használjuk az ábra jelöléseit. Az B csúcsnál lévő szög is β, mert egyállású szögek.
β külső szöge 100°. Így $\beta = 180° - 100° = 80°$.
Az A csúcsnál lévő szög is α, mert egyállású szögek.
A C csúcsnál lévő 110°-os külső szög, amely $\alpha + \beta$-val egyenlő.
Ebből $\alpha = 110° - \beta = 30°$

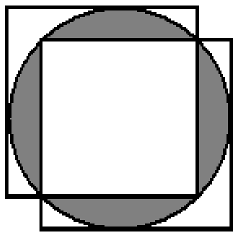


4. Egy autó 2 óra alatt megtette a tervezett útjának 20 %-át, a következő 3 órában a maradék út $\frac{1}{4}$ részét, és így az útból még 450 km maradt hátra. Milyen hosszú volt a tervezett út? Mennyi volt az eddig megtett útra számolt átlagsebessége?

A tervezett út hossza: x km.
Indulás után 2 órával a tervezett út 80 %-át kell még megtennie az autónak.
3 órával később a maradék út $\frac{3}{4}$-ét, azaz az egész út 60 %-át.
Így $0{,}6x = 450$.
Ebből $x = 750$ km
Az autó 5 óra alatt (750 – 450) km = 300 km utat tett meg.

Az átlagsebessége: $v = \frac{300km}{5h} = 60$ km/h

5. Az ábrán két egybevágó négyzet és egy 5 cm sugarú kör látható. Hány cm² a szürkére festett részek területének összege?



A szürkére festett részek területének összegét megkapjuk, ha a kör területéből kivonjuk a középső négyzet területét.
Ennek a négyzetnek az átlója a kör átmérőjével egyenlő.
A négyzet területének meghatározásához használjuk fel, hogy a négyzet átlói egyenlőek és merőlegesen felezik egymást.
Így $t_{négyzet} = 2r \cdot r = 2r^2$.
A keresett terület. $t = t_{kör} - t_{négyzet} = r^2(\pi - 2) \approx 28{,}54$ cm².

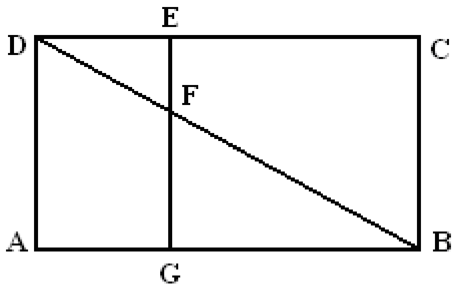
6. Melyik az a legkisebb természetes szám, amely számjegyeinek összege 24, osztható 24-gyel és 24-re végződik?

Mivel $24 = 3 \cdot 8$, így a 3-mal és 8-cal való oszthatóságot kell vizsgálni.
A keresett szám számjegyeinek az összege 24. Tehát a 3-mal való oszthatóság teljesül.
A 8-cal való oszthatóságból következik, hogy a szám számjegyit hátulról számolva, a harmadik számjegy csak 0; 2; 4; 6; és 8 lehet.
Mivel a feltételeknek eleget tevő számok közül a legkisebbet keressük, így arra kell törekednünk, hogy a

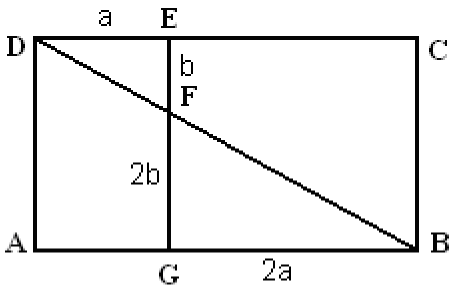
szám a lehető legkevesebb jegyű legyen és az elől lévő számjegyei a legkisebbek legyenek.
Most belátjuk, hogy a keresett szám legalább 5 számjegyből áll.
A feltételek szerint 1; 2 vagy 3 jegyű nem lehet, mert még a 824 számjegyinek az összege is csak 14.
4 jegye sem lehet, mert 24 – 14 = 10 egy számjeggyel nem érhető el.
A 10-et úgy kell felbontanunk egy kéttagú összegre, hogy az egyik szám a lehető legkisebb pozitív számjegy legyen: 10 = 1 + 9.

A feladat feltételeinek megfelelő természetes szám tehát a 19824.

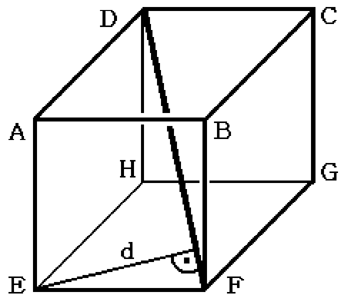
7. Egy téglalapot két egyenessel négy részre darabolunk: két trapézra és két derékszögű háromszögre (nézd az ábrát). A kisebbik háromszög területe 5 cm^2, a nagyobbiké 20 cm^2. Mekkora a trapézok területének összege?



Ha a téglalap területéből kivonjuk a háromszögek területének összegét, akkor trapézok területének összegét kapjuk.
A DEFΔ hasonló BGFΔ-höz, mert szögeik egyenlőek.
A háromszögek területeinek aránya 1 : 4.
Így a hasonlóság aránya 1 : 2.
Az ábra jelölését felhasználva ab = 10 cm^2 (a DEFΔ területének kétszerese).
A téglalap területe: t = 3a·3b = 9ab.
Felhasználva a DEFΔ háromszög területére kapott értéket: t = 9ab = 90 cm^2.
$t_{trapéz}$ = (90 – 25) cm^2 = 65 cm^2.



8. Az ábrán látható kocka éleinek hosszúsága 1 dm. Mekkora az E csúcsnak a DF testátlótól való távolsága?



A DEF derékszögű háromszög befogói EF = 1 dm, DE = $\sqrt{2}$ dm (az AEHD négyzet átlója).
A Pithagorasz-tétel alapján a DEF háromszög FD átfogója $\sqrt{3}$ dm.
A DEF háromszög területét számoljuk ki kétféleképpen: a két befogó szorzatából, illetve az átfogó és d szorzatából.

Ebből $d\sqrt{3} = \sqrt{2}$ egyenletet kapjuk, amelyből $d = \sqrt{\frac{2}{3}}$ dm.