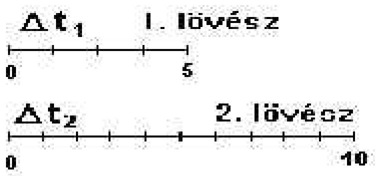
SZEGŐ GÁBOR
MATEMATIKAVERSENY
1998/1999
II. FORDULÓ - MEGOLDÁS

1.



1. lövész: D $t_1 = \frac{5}{4}$ s

2. lövész: D $t_2 = \frac{10}{9}$ s

D $t_1 = \frac{5}{4}$ s = $\frac{10}{8}$ s > $\frac{10}{9}$ s = D t_2
A 12 lövés leadásakor 11D t idő telik el:
11D $t_1 >$ 11D t_2 ? A 2. lövész a gyorsabb.

2. A keresett természetes szám legyen n.
$72 = 2^{3\times} 3^{2}$
72i n U ha 8i n és 9i n (a 8 és a 9 relatív prímek)
8i n U ha az n utolsó 3 jegyébol álló háromjegyű szám osztható 8-cal.
A lehetséges végződések: 000; 007; 070; 700; 077; 707; 770 és 777.
Ezek közül csak az első felel meg.
Kell lennie 0-tól különböző számjegynek is: legalább egy 7-nek.
9i n U ha n számjegyeinek az összege osztható 9-cel.
Ekkor pedig legalább 9 db 7-es számjegy kell, mert a 7 és a 9 relatív prímek.
A legkisebb ezek közül: 777 777 777 000.

3. x: a teherautók száma (x Î **N,** x > 8)
t : a garázs területe
Az egy autó által elfoglalt hely

eredetileg: $\frac{t}{x-8}$

átépítés után: $\frac{1,5t}{x+8}$. Ez a két mennyiség egyenlő.

$\frac{t}{x-8} = \frac{1,5t}{x+8}$

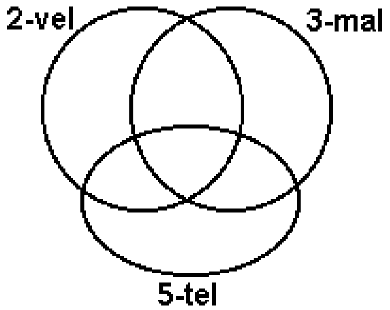
Amelyből rendezés után x = 40 adódik.
Ez megfelel a feladat feltételeinek. Tehát 40 autója van a vállalkozónak.

4. Adjuk össze 20-ig azokat a természetes számokat, amelyekben a számjegyek összege páros szám: 2 + 4 + 6 + 8 + 11 + 13 + 15 + 17 +19 + 20 = 115.
22 - 40 - ig a fenti számok mindegyikéhez 20 kell adni, így az összeg:
115 + 10 * 20 = 315

42 - 60 - ig 40 kell adni: 115 + 400 = 515
62 - 80 - ig az összeg: 115 + 600 = 715
82 - 99 - ig: 115 + 800 - 100 = 815
101 + 103 + 1 + 118 = 95 + 1000 = 1095
Az előzőkhöz hasonlóan számolunk.
121 - 138 - ig az összeg: 1095 + 200 = 1295
141 - 158 - ig: 1095 + 400 = 1495
161 - 178 - ig: 1095 + 600 = 1695
181 - 200 - ig: 1095 + 800 + 200 = 2095

Adjuk most össze a részeredményeket: 115 + 315 + 1 1695 + 2095 = 10150
202 - 400 -ig az eddig előforduló számok mindegyikéhez 200-at kell adni.
Eddig 10 csoport (200 = 10 * 20) szerepelt és miden csoportban 10 szám fordult elő. Kivétel az utolsó, amelyben 11 szám van. Így eddig (10 * 10 + 1 =) 101 szám összegét határoztuk meg. A következő 101 szám összege:
202 + 1 + 400 = 10150 + 101 * 200 = 30350.
Folytatva a gondolatmenetet: 402 - 600 - ig az összeg: 10150 + 101 * 400 = 50550
602 - 800 - ig: 10150 + 101 * 600 = 70750
802 - 998 - ig: 10150 + 101 * 800 - 1000 = 89950
Adjuk ismét össze az eddigi eredményeket: 10150 + 1 + 89950 = 251750
Folytassuk az előző eljárást!
1001 + 1 + 1018 = 95 + 10000 = 10095
1021 - 1038 - ig az összeg: 10095 + 200 = 10295
Ezt folytatva 1200-ig, 1400-ig, 1 végül 1998-ig megkapjuk az összeget:
999500

5.



2-vel minden második szám osztható: $\left[\frac{1000}{2}\right]$ = 500,

3-mal minden harmadik: $\left[\frac{1000}{3}\right]$ = 333,

5-tel minden ötödik: $\left[\frac{1000}{5}\right]$ = 200,

6-tal minden hatodik: $\left[\frac{1000}{6}\right]$ = 166,

10-zel minden tizedik: $\left[\frac{1000}{10}\right]$ = 100,

15-tel minden tizenötödik: $\left[\frac{1000}{15}\right]$ = 66, 30-cal minden harmincadik: $\left[\frac{1000}{30}\right] = 33.$

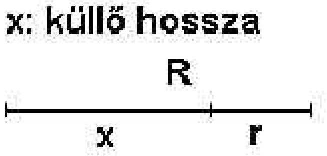
A három közül legalább eggyel osztható számok száma:

500 + 333 + 200 - (166 + 100 + 66) + 33 = 734

Egyikkel sem osztható számok száma:

1000 - 734 = 266.

6.



$t_{kör} = r^{2p} = 1p\ m^2$

$t_{külso} = \frac{(R^2 - r^2)\pi}{8}$

Ez a két terület egyenlő: Ebből R = 3 m.

x = R - r = 2 m

7. x: 50 Ft-osok száma,

y: 20 Ft-osok száma,

20 - (x + y): 5 Ft-osok száma. 0 < x + y < 20, x, y Î **Z**

50x + 20y + 5(20 - x - y) = 500

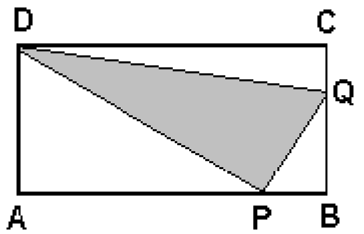
Egyszerűsítés és összevonás után:

9x + 3y = 80

3(3x + y) = 80

Az egyenlet bal oldala mindig osztható 3-mal, a jobb pedig ne. Így az egyenlőség nem állhat fenn, nincs megoldás.

8.



AB = a és BC = b

$t_{DAP} = \frac{1}{2} b \frac{4}{5} a = \frac{2}{5} ab$,

$t_{PBQ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} a \frac{2}{3} b = \frac{1}{15} ab$,

$t_{DQC} = \frac{1}{2} a \frac{1}{3} b = \frac{1}{6} ab$,

$t_{ABCD} = ab.$

$t_{DPQ} = t_{ABCD} - (t_{DAP} - t_{PBQ} - t_{DQC}) = ab - \frac{19}{30} ab = \frac{11}{30} ab$

$\frac{11}{30} ab = 156\ cm^2$, amelybol $ab = \frac{4680}{11}\ cm^2$ »
» $425{,}45\ cm^2$.