SZEGŐ GÁBOR MATEMATIKAVERSENY

1999/2000

I. FORDULÓ - MEGOLDÁS

1. Mivel $3\cdot 4=12$ és 3 és 4 relatív prímek, ezért egy szám akkor és csak akkor osztható 12-vel, ha 3-mal és 4-gyel is osztható.
Mivel a szám 4-gyel osztható, ezért $B=2$ vagy $B=6$.
Ha $B=2$, akkor, mivel a szám 3-mal is osztható, $A=0$; 3; 6 vagy 9,
Ha $B=6$, akkor $A=2$; 5 vagy 8.

2. Ha összeadjuk a röplabdázók, kézilabdázók és kosárlabdázók számát, akkor azokat, akik pontosan kétféle edzésre járnak (legyen a számuk x), kétszeresen,
akik mindhárom edzésre járnak, háromszorosan számoljuk.

Így $12+13+16=30+x+2\cdot 1$,
ebből $x=9$.

3. Adjuk össze a sorösszegeket. Mivel ez éppen a táblázatba beírt számok összege, ezért, mint 4 pozitív szám összege, pozitív kell, hogy legyen.
Ha az oszlopösszegeket adjuk össze, az alapján a táblázatba beírt számok összegének negatívnak kellene lennie.
Mivel a kettő egyszerre nem teljesülhet, a táblázat nem tölthető ki a feltételek szerint.

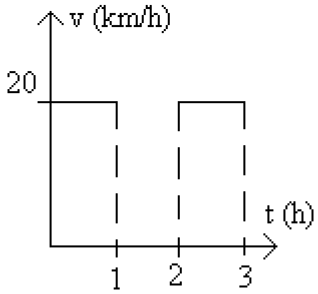
4. Tekintsük az $1 + 2 + 3 + \ldots + 1997 + 1998 + 1999 = 1999 + 2000$ (hamis) egyenlőséget. A kifejezésben szereplő "+" jelek közül akárhányat "– " jelre változtathatunk. Igazzá tehető-e így az egyenlőség?
Az $1+2 +\ldots+1999 = 1999\cdot (1999+1)/2 = 1999000$, tehát páros szám.
Ha bármely szám előtti előjelet megváltoztatjuk, ez az összeg a szám kétszeresével csökken, tehát bármilyen előjelezés esetén páros marad.
A másik oldalon 1999+2000 és 1999-2000 is páratlan,
tehát nem tehető igazzá az egyenlőség.

5. Melyik az a legkisebb olyan szám, amely 72-vel osztható, és (tízes számrendszerben felírva) csak a 2-es és 0-ás számjegy szerepel benne?
Mivel $9\cdot 8=72$ és 9 és 8 relatív prímek, ezért a keresett számnak oszthatónak kell lennie 8-cal és 9-cel.
A számjegyek összegében csak a 2 számít, így a 9-cel való oszthatóság miatt legkevesebb 9 db 2 számjegynek kell szerepelnie
Mivel a legkisebb ilyen számot keressük, próbálkozzunk a 9 db 2-sel! A 8-cal való oszthatóság miatt először vizsgáljuk meg a 222-t: nem osztható 8-cal

022 sem, 202 sem, 220 sem, 002 sem, 020 sem, viszont a 200 már igen.
Ezért a keresett szám első kilenc számjegye 2, utána még két 0: 22222222200.

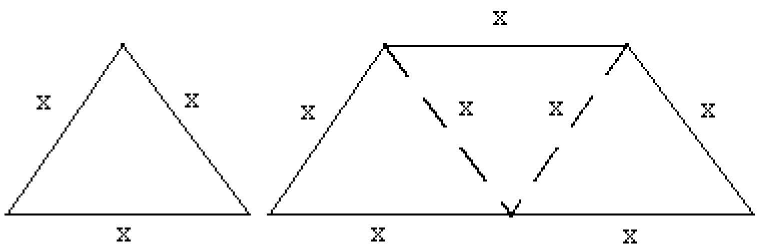
6. A nyolcadikosok klubdélutánt rendeztek. A következő nap osztályfőnöki órán az osztályfőnök mindenkit megkérdezett, hogy hány osztálytársával táncolt. Az alábbi válaszok születtek: 8, 2, 0, 3, 6, 5, 0, 0, 4, 6, 5, 5, 3, 6, 4, 4, 3, 1, 1, 0, 4, 3, 6, 3, 3, 2, 1, 4, 1, 0, 2. Az osztályfőnök a végén megszólalt: "Valaki biztosan rosszul emlékszik!" Miből jött rá ilyen rövid idő alatt?
Ha a megadott számokat összeadjuk, a táncospárok számának kétszeresét, azaz páros számot kell, hogy kapjunk.
Itt viszont 13 darab, azaz páratlan számú páratlan szám található, ezért a számok összege páratlan lesz,
ami ellentmondás.

7. Egy kerékpáros 3 órahosszát kerékpározott. Bármely kétórás idoszak alatt 20 kilométert tett meg. Lehetséges-e az, hogy a 3 óra alatt megtett út több, mint 30 km?
Lehetséges, például úgy, hogy az első és harmadik órában állandó, 20 km/h nagyságú sebességgel halad, a második órában pedig zérus a sebessége:



8. Egy háztető alapja téglalap, melynek oldalai x és 2x hosszúságúak, továbbá az összes tetőgerinc hossza szintén x. A tető háromszög alakú oldallapjának területe 40 m^2. Mekkora az egész tető területe?

A háztető felülete két szabályos háromszögből és két húrtrapézból áll. Rajzoljuk ki ezeket a síkba



Kössük össze a trapéz rövidebbik alapjának végpontjait a hosszabbik alap felezőpontjával: így a trapézt három olyan szabályos háromszögre bontottuk, amelyek mindegyike egybevágó az egyik oldalháromszöggel.
Így a teto területe $8 \cdot 40\ m^2 = 320\ m^2$.