

SZEGŐ GÁBOR

MEGYEI MATEMATIKAVÉRSÉNY

1994-2003



SZOLNOK

2022

SZEGŐ GÁBOR

MEGYEI MATEMATIKAVERSENY

I. rész

A feladatsorok összeállításában és lektorálásában közreműködtek:

Algayné Varga Éva

Béres Jenő

Drávucz Anita

Kiss Béla

Kiss József

Pécsi István

Pécsiné Röhri Zsuzsanna

Peták Kálmán

Pogány Gyula

Pongrácz András

Sebestyén István

Szabóné Karkecz Aranka

Szécsiné Festő Hegedűs Margit

Tekse Marianna

Turcsányi Zoltán

Veres Dénes

Nyelvi lektor: Bódor Mária

Szerkesztette: Veres Dénes

Készült a Verseghy Ferenc Gimnáziumban

Kereskedelmi forgalomba nem hozható!

Szolnok, 2022

Előszó (első kiadás).....	3
Előszó (harmadik kiadás)	5
A verseny legeredményesebb résztvevői	6

FELADATSOROK

1. 1994/1995. tanév	9
2. 1995/1996. tanév	13
3. 1996/1997. tanév	16
4. 1997/1998. tanév	19
5. 1998/1999. tanév	22
6. 1999/2000. tanév	25
7. 2000/2001. tanév	28
8. 2001/2002. tanév	31
9. 2002/2003. tanév	34
10. 2003/2004. tanév	37

MEGOLDÁSOK

1. 1994/1995. tanév I. forduló	40
II. forduló	42
III. forduló	44
2. 1995/1996. tanév I. forduló	46
II. forduló	48
III. forduló	50
3. 1996/1997. tanév I. forduló	51
II. forduló	52
III. forduló	53
4. 1997/1998. tanév I. forduló	55
II. forduló	56
III. forduló	58

5.	1998/1999. tanév I. forduló	60
	II. forduló	62
	III. forduló	64
6.	1999/2000. tanév I. forduló	66
	II. forduló	68
	III. forduló	70
7.	2000/2001. tanév I. forduló	72
	II. forduló	74
	III. forduló	76
8.	2001/2002. tanév I. forduló	78
	II. forduló	80
	III. forduló	82
9.	2002/2003. tanév I. forduló	84
	II. forduló	86
	III. forduló	88
10.	2003/2004. tanév I. forduló	90
	II. forduló	92
	III. forduló	94
	Felhasznált irodalom	96

SZEGŐ GÁBOR 1895. január 20-án Kunhegyesen született. 1904 őszén került iskolánkba, amit akkor szolnoki Magyar Királyi Állami Főgimnáziumnak neveztek. Leginkább Zoltán Lipót számtanóráit kedvelte, de jeleskedett fizikából, történettanból is. Felsőbb osztályosként rendszeresen oldott meg feladatokat a Középiskolai Matematikai Lapokban (KöMaL elődje), majd 1912-ben megnyerte a Matematikai és Fizikai Társulat XIX. matematika tanulóversenyét. A bírálóbizottság (melynek tagjai között olyan neves matematikusok voltak, mint König Gyula, König Dénes, Fejér Lipót és Kürschák József) így értékelte munkáját:

„A bizottság a benyújtott dolgozatokat átvizsgálva és mértékelve, az első jutalomra Szegő Gábort, a szolnoki Állami Főgimnáziumban Zoltán Lipót tanítványát ajánlja, ki nemcsak mind a három feladatot hibátlanul oldotta meg, hanem a nehezebb első tétel kidolgozásában öntudatos eljárásával kiváló elmeélt tanúsított.”

1912-ben jeles érettségivel zárta gimnáziumi tanulmányait, majd beiratkozott a budapesti Pázmány Péter Tudományegyetem matematika-fizika szakára. Tanította Beke Manó, Fejér Lipót, Kürschák József. Ekkor ismerkedett meg és kötött örök barátságot Pólya Györggyel és Fekete Mihállyal. Életútját a történelem viharai kavarták: 1913-tól Berlinben és Göttingenben tanult, 1926-tól a königsbergi egyetem tanára, 1934-től a Saint Louis-i Wasington Egyetemen oktatott. 1938-1960-ig a Stanford Egyetem tanszékvezető egyetemi tanára volt, majd Palo Alto-ban élt 1985-ig, élete végéig. Közben többször látogatott Magyarországra.

A XX. század egyik vezető matematikusa volt, aki igen jelentős eredményeket ért el az analitikus függvények, izoperimetrikus egyenlőtlenségek, Töplitz-formák és ortogonális polinomok elméletében. Utóbbi igen nagy hatással volt más tudományágakra is. Dolgozatai, diszkussziói logikusak, könnyen érthetők, egyenesen vezettek a lényeghez.

Gyakran találkozott fiatal matematikusokkal, kereste az új tehetségeket, tanította, segítette őket pályájukon. Több tételt és elméletet neveztek el róla: Szegő erős határérték-tétele, Rogers-Szegő polinom, az ortogonális polinomok Szegő-féle osztálya, a Szegő-féle magfüggvény. Eredményeit felhasználták a statisztika, a fizika, a kémia és a különböző mérnöki tudományok területén. 1995-ben Kunhegyesen tudományos emlékülést rendeztek tiszteletére, és felavatták mellszobrát.

1995-ben, *Szegő Gábor* születésének 100. évfordulóján tartottuk első alkalommal versenyünk döntő fordulóját, így az idén már 11. alkalommal rendeztük meg. A verseny létjogosultságát, eredményességét bizonyítja az a több ezer diák, aki részt vett rajta, azok a kimagasló eredmények, amelyeket a versenyen jól szereplő tanulók a későbbiekben értek.

Íme néhány szép eredmény:

Az 1998/1999. évi verseny legjobbjai: Pongrácz András, Szekeres Balázs, Bóka Gergely iskolánk speciális matematika tagozatán tanultak tovább. Pongrácz András ebben az évben 7. osztályos volt, a következő évben újra indult, és I. helyezést ért el.

Pongrácz András eredményei a 10. évfolyamon: KöMaL matematika 6. díj, Arany Dániel Matematikaverseny III. díj; a 11. évfolyamon: KöMaL matematika 10. díj, matematika OKTV 17. helyezés; a 12. évfolyamon: KöMaL matematika 6. díj, matematika OKTV 18. helyezés; 2008-ban egy nemzetközi matematikaversenyen Franciaországban a győztes magyar csapat tagja. Jelenleg az ELTE matematikus hallgatója.

Szekeres Balázs eredményei a 10. évfolyamon: KöMaL matematika 2. díj, KöMaL fizika 1. díj, Mikola Sándor Fizikaverseny 5. helyezés; a 11. évfolyamon: KöMaL fizika 1. díj, Eötvös verseny III. díj, fizika OKTV 5. helyezés; a 12. évfolyamon: KöMaL fizika 1. díj, fizika OKTV 3. helyezés. 2003-ban Nemzetközi Diákolimpián bronzérmes. Tanulmányait jelenleg a BME fizikus szakán folytatja.

Bóka Gergely eredményei a 10. évfolyamon: KöMaL matematika 5. díj, KöMaL fizika 2. díj; a 11. évfolyamon: KöMaL matematika 1. díj, KöMaL fizika 2. díj, matematika OKTV 10. helyezés; a 12. évfolyamon: KöMaL matematika 6. díj, KöMaL fizika 2. díj, fizika OKTV 7. helyezés. Tanulmányait a BME Gépészmérnöki Karán fejezte be.

Köszönjük az együttműködő, felkészítő munkát az általános iskolában dolgozó matematika-tanároknak, munkaközösségeknek.

Köszönettel tartozunk iskolánk nyugdíjba vonult tanárainak: **Kiss Józsefnek**, aki ötletével életre hívta ezt a versenyt; **Peták Kálmánnak**, aki éveken át irányította a verseny szervezését, és **Béres Jenőnek**, aki az iskola igazgatójaként 10 éven keresztül értő gazdája volt az egyre népszerűbb versenynek.

2004-től a verseny gondozója **Pogány Gyula**, iskolánk új igazgatója, aki matematika szakos tanárként is ápolja ezt a szép hagyományt. Iskolánk matematika munkaközössége nem fogó lelkesedéssel folytatja az újabb versenyek szervezését.

Verseghegy Ferenc Gimnázium

Szolnok, 2005. január

Veres Dénes

Az első kiadás 1994 – 2003-ig, a második kiadás 1994 – 2008-ig tartalmazta a feladatsorokat megoldások nélkül. A verseny megrendezésének 20. és 25. évfordulójakor elmulasztottuk a feladatsorok kiadását. A 30. évfordulóhoz közeledve elhatároztam, hogy a verseny minden feladatsorát és a megoldásukat összeszerkesztem. A verseny mindhárom évtizede egy-egy kis kötetet tölt meg. A három kötet közül ez az első okozta a legtöbb problémát. A feladatok megoldását gyakorlatilag újra be kellett gépelni, mert használható formában nem álltak rendelkezésre. Ez 30 feladatsor megoldását jelentette. A további két kötet már nem jelentett ekkora feladatot, mert a feladatsorokat és a pontozási útmutatókat is én készítettem, így minden rendelkezésre állt elektronikus formában is.

Remélem, hogy ez a közel 250 feladat örömet szerez majd olvasóinak, és segíti a matematikaversenyekre történő felkészülést.

Köszönöm Bódor Mária, Lapu Béla, Pécsiné Röhri Zsuzsanna és Vágó Csaba munkatársaim áldozatos és körültekintő lektori munkáját, valamint didaktikai észrevételeit.

Versegly Ferenc Gimnázium

Szolnok, 2022. július

Veres Dénes

A táblázatban feltüntetett helyezéseket az abszolút sorrend alapján állapítottam meg.

(A táblázatban szerepelnek olyan tanulók is, akiknek az általános iskolai matematikatanáráról nincs információ. Ilyen esetben a tanuló általános iskoláját vagy azt a helységet tüntettem fel a táblázatban, ahol a tanuló az általános iskolát elvégezte. A felsorolásban előforduló pontatlanságokért és hiányosságokért elnézést kérek. Minden kiegészítést és pontosítást köszönettel fogadok. A szerkesztő.)

1994/1995. tanév

1995/1996. tanév

A tanuló neve	Általános iskolai tanára		A tanuló neve	Általános iskolai tanára
Kis István	Forgácsné Holló Jolán	1.	Molnár Judit	Kóródi Sándorné
Sipos Zoltán	Sulák Istvánné	2.	Döme Andrea	Szathmáry Istvánné
Ecsédi Mátyás	Forgácsné H. Jolán	3.	Bicskei Viktor	Szathmáry Istvánné
Szögi Zoltán	Nagyné Balta Vilma	4.	Bakos Alexa	Völgyesi Istvánné
Nagy Gergő	Szekera Zsuzsanna	5.	Simon Zsuzsa	Nagy Róbert
Szász Péter	Kochné Vörös Katalin	6.	Herczeg Géza	Dr. Lánczi Istvánné
Bicskei Viktor	Szathmáry Istvánné	7.	Csuka Bernát	Dr. Lánczi Istvánné
Juhász Miklós	Völgyesi Istvánné	8.	Terjéki Tamás	Büttner Károlyné
Lakatos Veronika	Szekera Zsuzsanna	9.	Bolya Imre	Pető Béláné
Csuka Bernát	Dr. Lánczi Istvánné	10.	Tolnay Nóra	Mezőtúr

1996/1997. tanév

1997/1998. tanév

A tanuló neve	Általános iskolai tanára		A tanuló neve	Általános iskolai tanára
Bozsik Balázs	Szakál Eleonóra	1.	Komlós Gábor	Bencsik Józsefné
Jauernik Judit	Nagy Istvánné	2.	Szilágyi Péter	Ozsvárt Lászlóné
Farkas Viktor	Berta Mihályné	3.	Balaton Attila	Szügyi Dezső
Szügyi Gábor	Császár István	4.	Terjéki László Dénes	Büttner Károlyné
Terjéki László Dénes	Büttner Károlyné	5.	Bozsik Judit	Szakál Eleonóra
Komlós Gábor	Bencsik Józsefné	6.	Madarász Márta	Hadossy Katalin és Németh József
Polyák Erika	Bobákné M. Margit	7.	Pesti Zsolt	Pestiné F. Mária
Pesti Kálmán	Bazsó Ernő	8.	Németh Antal	Németh Edit
Szathmáry Borbála	Gulyás Károly	9.	Gulyás Éva	Bakonyi Istvánné
Nagy Zoltán	Dobi Dénesné	10.	Szántó Hajnalka	Pestiné F. Mária

1998/1999. tanév

1999/2000. tanév

A tanuló neve	Általános iskolai tanára		A tanuló neve	Általános iskolai tanára
Pongrácz András	Döbrei Józsefné	1.	Pongrácz András	Döbrei Józsefné
Szekeres Balázs	Vermes Tamásné	2.	Tóth László	Dobi Dénesné
Bóka Gergely	Török Jánosné	3.	Franczen Árpád	Balázs Sándorné
Balaton Attila	Forgácsné H. Jolán	4.	Pethő Éva	Büttner Károlyné
Pető Dávid	Mihályiné P. Györgyi	5.	Szatmári Szabina	Zsömléné K. Rózsa
Tóth Eszter	Mihályiné P. Györgyi	6.	Pálinkás Csaba	Sebők Péter
Fehér Péter	Mihályiné P. Györgyi	7.	Kovács Gergely	Szandaszőlős
Györe Ágnes	Mihályiné P. Györgyi	8.	Pogány Levente	Sápi Tiborné
Sándor István	Pardy Károlyné	9.	Tóth Attila	Kodály Zoltán Ált. Isk.
Ecseki Adrienn	Kovács Gusztávné	10.	Horváth Péter	Szandaszőlős

2000/2001. tanév

2001/2002. tanév

A tanuló neve	Általános iskolai tanára		A tanuló neve	Általános iskolai tanára
Pálinkás Csaba	Sebők Péter	1.	Csete Dániel	Dobi Dénesné
Szalai András	Törökszentmiklós	2.	Herczeg Péter	Sápi Tiborné
Jordán Tamás	Bencsik Józsefné	3.	Széchenyi Gábor	Ferencz János
Mészáros Barbara	Jászfényszaru	4.	Jordán Tamás	Bencsik Józsefné
Virág Lajos	Vermes Tamásné	5.	Nagy Péter	Huszár Judit
Csete Dániel	Dobi Dénesné	6.	Szabó András	Dr. Mészárosné Fekete-Szabó Andrea
Pogány Levente	Sápi Tiborné	7.	Szilágyi Tamás	Dobi Dénesné
Bedekovics Judit	Nagy Andrásné	8.	Holló László	Kisújszállás
Fajka János	Jászberény	9.	Horváth Ádám	Bencsik Józsefné
Veres Zsuzsanna	Gulyás Károly	10.	Magyari Márton	Csernák Péterné

2002/2003. tanév

2003/2004. tanév

A tanuló neve	Általános iskolai tanára		A tanuló neve	Általános iskolai tanára
Kovács Péter	Balog Piroska	1.	Terjéki Béla	Barhács Lászlóné
Szabó Gabriella	Forgácsné H. Jolán	2.	Szabó Gabriella	Forgácsné H. Jolán
Vinkó Anna	Kádár Kálmánné	3.	Pál Tamás	H. Tóth Gáborné
Cseh Ágnes	Balog Piroska	4.	Kovács Györgyi	Sebők Péter
Gál Levente	Szecseiné V. Mária	5.	Győri Erika	Szelke Tiborné
Zarnócz Tamás	Csépa	6.	Erdős István	Forgácsné H. Jolán
Sebők Balázs	Mihályiné P. Györgyi	7.	Tóth Petra	Forgácsné H. Jolán
Urbán Erzsébet	Karcag	8.	Szabó Gergő	Balázs Sándorné
Csima Géza	Szekera Zsuzsanna	9.	Stuhl Anna	Végsőné M. Erika
Márkus Ádám	Szekera Zsuzsanna	10.	Várszegi Dániel	H. Tóth Gáborné



I. forduló

1. Jász-Nagykun-Szolnok megye lakosságának 37 %-a 18 éven felüli férfi, 38 %-a 18 éven felüli nő, 12 %-a 18 éven aluli fiú. A férfiak 65 %-a, a nők 50 %-a, a fiúk 15 %-a, a leányok 5 %-a olvassa az Új Néplapot. A megye lakosságának hány százaléka olvassa az Új Néplapot? (A megye lakóinak száma 420 000 fő.)

2. A 8. b osztályban az angol, német és orosz nyelv közül minden tanuló legalább kettőt tanul. Németet tizenöten, németet és oroszot öten, angolt és oroszot nyolcan, németet és angolt tizenketten tanulnak. Mekkora az osztály létszáma?

3. Melyik a nagyobb? a) x vagy $3x$ b) y vagy y^2 c) z vagy $\frac{1}{z}$

4. Egy apa fia születési évszámának feléből kivonta az évszámnál négygyel nagyobb szám harmadrészét, s eredményül 331-et kapott. Hány hónapos lehet a gyermek?

5. Egy könnyűnek látszó kérdés:

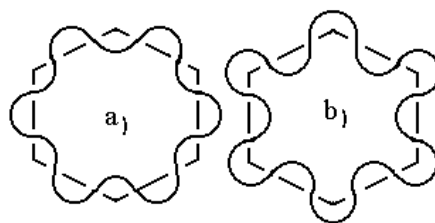
Melyik az a szám, amelyet a hetedrészével elosztva hetet kapunk eredményül?

6. Játsszunk! Írd fel az első húsz természetes számot 1994 jegyei és matematikai jelek felhasználásával! (1 darab 1-es, 2 darab 9-es, és 1 darab 4-es szerepeljen a felírásban! Pl.: $31 = 19 + 4\sqrt{9}$)

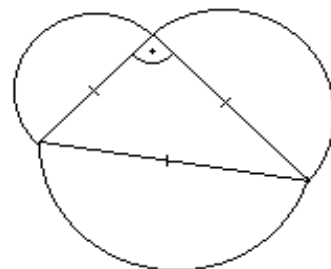
7. Egy kocka minden lapjára ráragasztottunk egy kockát. (Az érintkező négyzetek fedésbe kerülnek.) Egy kocka felszíne 24 cm^2 . Mennyi lesz a test felszíne és térfogata?

8. Két egybevágó szabályos hatszögből készült a két ábra.

Az oldalakat négy egyenlő részre osztottuk. A körívek középpontja vagy a hatszög csúcsai, vagy az oldalak felezőpontjai. A hatszög oldalait töröljük. A körívdarabokkal határolt idomok közül melyiknek nagyobb a területe? Mennyivel? (A hatszög oldalai 4 cm hosszúak.)



9. Igaz-e, hogy a legnagyobb félkör területe annyi, mint a két kisebb félkör területének összege?



10. Egy kettős útelágazásnál három ikertestvér lakik. Igazmondó mindig igazat mond, Hazug mindig hazudik, Felemás két egymás utáni mondata közül az egyik igaz, a másik hamis. (Nem biztos, hogy az első az igaz.) Egy vándor megkérdezte az egyiket:

- Melyik út vezet Mekkába?
- Ez! - és rámutatott a jobb oldali útra.

- Te melyik gyermek vagy?
- Felemás! - hangzott a válasz.

Következtess ki ezután: a jobb vagy a bal oldali út vezet Mekkába? [◀](#) [▶](#)

II. forduló

1. Leírjuk a pozitív egész számokat sorban egymás mellé: 1234567891011121314 ... Mi lesz az 1994. leírt számjegy?

2. Számítsd ki!
$$\frac{4321234 \cdot 8642467 - 4321233}{4321233 \cdot 8642467 + 4321234}$$

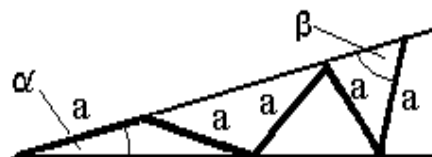
3. Egy kocka élei 6 cm hosszúak. A kockát minden lapjának irányából átfúrjuk egy 2 cm oldalú, négyzet keresztmetszetű lyukkal. (A kis négyzet oldalai párhuzamosak a megfelelő oldallap négyzet oldalaival, középpontjuk egybeesik.) Mennyi az így keletkezett lyukas test felszíne és térfogata?

4. Az ábrán $\alpha = 20^\circ$, az "a" jelű szakaszok egyenlők.

a) Mekkora a β ?

b) Mekkora lehet α ,

hogy legyen megoldása a feladatnak?



5. Tamás a fiával és Kálmán a fiával elmentek horgászni. Tamás annyi halat fogott, mint a fia, és Kálmán is annyi halat fogott, mint a fia. Összesen 21 halat fogtak. Tamás elmondta, hogy a fiát Andrásnak hívják. Hogy hívják Kálmán fiát?

6. a) Egy áru árát 10%-kal csökkentették, majd egy hét múlva 10%-kal emelték. A legújabb ár hány százaléka az eredeti árnak?

b) Fizetésem 40%-át adó címén levonták. Ha nem vonnak le semmit, hány százalékkal több pénzt kapok?

7. Egy vadasparkban egyszarvú orrszarvúak, szürke ökrök (két-két szarvuk van) és struccok élnek. 50 fejük, 48 szarvuk és 150 lábuk van. Mennyi van az egyes állatokból a vadasparkban?

8. Egy osztály nagyobb kerékpártúrára indult. Egy idő múlva az osztály megtett útja úgy aránylik a hátralévő úthoz, mint 2 : 3. Ezután 50 km-es utat tettek meg, s ekkor az összesen megtett út úgy aránylik a hátralévő úthoz, mint 6 : 5. Mekkora utat tett meg az osztály összesen a túra során?

9. Bea, Cili, Dóra, Edit és Flóra körmérkőzéses asztalitenisz-versenye véget ért. A következőket mondták:

Bea: Dóra második lett.

Cili: Első lettem.

Én csak harmadik lettem.

Flóra második lett.

Dóra: Második lettem.

Edit: Negyedik helyen végeztem.

Edit csak negyedik lett.

Bea első lett.

Flóra: Harmadik lettem.

Cili utolsó lett.

Kiderült, hogy minden leány egy kijelentése igaz, egy hamis. Állítsd össze a helyezési sorrendet!

10. Három (pozitív) prímszám összegének ötszöröse egyenlő a szorzatukkal. Melyik ez a három prímszám? [◀](#) [»](#)

III. forduló (döntő)

1. Melyik a nagyobb?

a) x vagy $-x$

b) y vagy $|y|$

c) z^2 vagy z^3

2. Oldd meg a következő egyenleteket!

a) $\frac{x-2}{x-2} = 1$

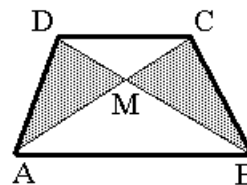
b) $(x-2)(x+3)(2x-7) = 0$

c) $(x-3)^2 + (x+y+4)^2 = 0$

3. Aladár, Béla és Dezső elment horgászni. Aladár és Béla annyi halat fogott összesen, mint Dezső. A halak száma mindegyikükénél prímszám volt. Hány halat fogott, aki a legkevesebbet fogta?

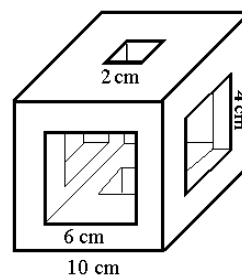
4. Három ember játszott, minden egyes játék után a harmadik helyezett megduplázta pénzéből a másik két játékos pénzét. Három játék után mindenkinek 400 Ft-ja lett úgy, hogy mindegyikük egyszer volt harmadik helyezett. Mennyi pénzzel kezdett játszani egy-egy játékos?

5. Az ABCD négyszög trapéz. Igazold, hogy a két bevonalkázott háromszög (AMD és BMC) területe egyenlő!

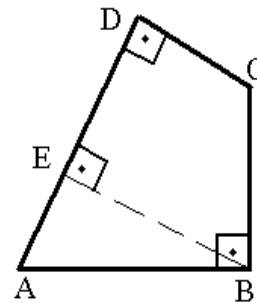


6. Határozd meg a $\frac{4}{7}$ tizedes tört alakjában a tizedes vessző utáni első 421 számjegy összegét!

7. A 10 cm élű kockát kifúrtuk minden lapjának irányából egy-egy négyzet keresztmetszetű lyukkal. (A furat oldalai párhuzamosak a megfelelő éllel, a négyzet középpontja egybeesik az oldallap középpontjával.) A furatok négyzeteinek oldala 6, 4 és 2 cm hosszúak. Mekkora az így keletkezett lyukas test térfogata és felszíne?



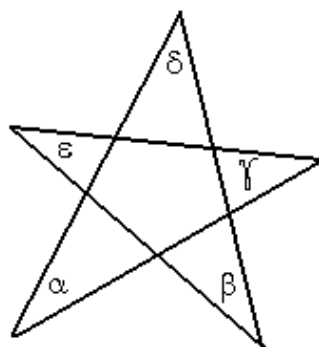
8. Az ábrán az ABCD négyszög B és D csúcsánál derékszög van, BE merőleges AD-re, AB és BC hossza egyenlő, DE hossza 10 cm. Mekkora az ABCD négyszög területe? [◀](#) [▶](#)



I. forduló

- Írd fel az 1995 számjegyeinek felhasználásával az első húsz természetes számot! (Például: $26 = 9 \cdot \sqrt{9} - 1^5$)
- Minden 7-nél nagyobb páros szám előállítható két különböző prímszám összegeként. 126-ot felbontjuk a fenti módon. Mennyi lesz a két prímszám közötti legnagyobb, illetve legkisebb különbség?
- A Verseyhy Ferenc Gimnázium 1995-ben érettségizett tanulóinak 94,44%-a jelentkezett egyetemre-főiskolára, és a jelentkezők 80,4%-át fel is vették. 20 tanulót nem vettek fel. Hányan érettségiztek a gimnáziumban 1995-ben? Hány tanuló nem jelentkezett továbbtanulni?
- Három nap alatt 66 km-t gyalogoltunk. A második napon megtett út kétszerese az első napon megtett útnak, és kétharmad része a harmadik napi távnak. Mennyi utat tettünk meg a harmadik napon?
- Egy táborban 200-nál kevesebb katona van. Ha kettesével, hármasával, négyesével, ötösével és hatosával sorakoztatják őket, akkor mindig kimarad egy katona. Az őrmester kitalálta, hány embert kell egy sorba állítani, hogy ne maradjon ki senki sem. Hány katonát állított egy sorba? (Nem egyet, és nem is az összest.)
- Az ABC háromszög területe 1 m^2 . Az AB oldal két harmadoló pontja G és H, a BC oldal felezőpontja E, az AC felezőpontja F. Az AE és BF metszéspontja M. Mekkora a GHM háromszög területe?
- Az ábrán látható "nem szabályos" csillagötszögben mennyi az $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon$?
- Hányféleképpen olvasható ki SZEGŐ GÁBOR neve, ha az "S"-ből indulunk, jobbra lefelé vagy balra lefelé haladhatunk?

S
 Z Z
 E E E
 G G G G
 Ö Ö Ö Ö Ö
 G G G G G
 Á Á Á Á
 B B B
 O O
 R

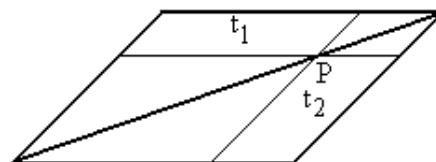


II. forduló

1. Leó, az oroszlán elejtett egy antilopot és hazavitte. Ha maga fogyasztaná el, akkor 3 óra alatt megenné, ha csak a párja fogyasztaná, akkor az 4 óra alatt enné meg. Egy-egy kölyök (hármán vannak) 10 óra alatt fogyasztaná el. Mennyi ideig tart az oroszláncsalád együttes ebédje?

2. Egy négyjegyű szám negyedik jegye az első jegy ötszöröse. A számjegyek összege 23. Melyik ez a szám?

3. A paralelogramma egyik átlójának P pontján át párhuzamosokat húzunk az oldalakkal. Igaz-e, hogy a t_1 és t_2 területek egyenlők? Miért?



4. Legyen az ABCD négyzet területe 1 (területegység), a P az AB oldal A-hoz közelebbi negyedelő pontja. Q a BC oldal B-hez közelebbi harmadoló pontja, R pedig a CD oldal felezőpontja. Mekkora a PQR háromszög területe?

5. Egy trapéz alapjai 10 és 5 cm hosszúak, átlói 9 és 12 cm-esek. Mekkora a trapéz területe?

6. Összeszoroztuk az egész számokat 1-től 101-ig. Hány nullára végződik a szorzat?

7. Mi az 1995^{1996} legnagyobb kétjegyű és háromjegyű osztója?

8. Egy 8×8 -as sakktáblán 64 katicabogár üldögél, minden mezőn pontosan egy. Adott jelre minden bogár átsétál egy szomszédos mezőre. (Két mező szomszédos, ha van közös oldaluk.) Lehetséges-e, hogy ezután is minden mezőn egy katicabogár ül? Mi a válasz akkor, ha a sakktábla 5×5 -ös, és minden mezőn pontosan egy katicabogár ül (azaz összesen 25 katicabogár van a táblán)? [◀](#) [»](#)

III. forduló (döntő)

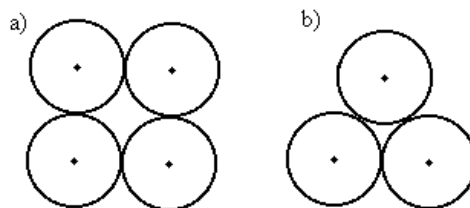
1. A ló 2 hónap alatt eszik meg egy kocsi szénát, a kecske 3 hónap alatt, a nyúl pedig 6 hónap alatt. Mennyi idő alatt esznek meg 2 kocsi szénát a ló, a kecske és a nyúl együtt?

2. 45 osztója a $11y538x$ hétjegyű számnak. Mennyi az x és az y értéke?

3. Az $\frac{1}{7}$ tizedes tört alakjában melyik a tizedesvessző utáni 1996. számjegy?

4. Melyik az az ötjegyű egész szám, amelyre igaz, hogy ha a szám végére írunk egy 1-et, akkor 3-szor akkora számot kapunk, mint ha az elejére írunk egy 1-et?

5. Az ábrán látható kályhacsöveket milyen hosszú zsineggel lehet körbekötni? A csövek átmérője 20 cm, és a kötésre 25 cm-t hagyunk.



6. Egy dobozban 3 piros, 4 fehér és 5 zöld

golyó van. Legkevesebb hány golyót kell kivenni (csukott szemmel), hogy biztosan legyen:

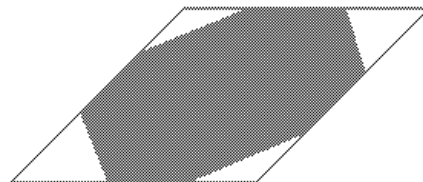
a) 1 piros golyónk,

c) 1 piros, 1 fehér és 1 zöld golyónk,

b) 2 zöld golyónk,

d) 1 piros vagy 1 zöld golyónk?

7. Egy rombusz oldalainak harmadoló pontjait az ábra szerint összekötve egy nyolcszöget kapunk. Hányadrésze a nyolcszög területe a rombusz területének? [◀](#) [»](#)



I. forduló

1. Melyik összeg páros, melyik páratlan?

$$A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 998^3 + 999^3; \quad B = 1 + 2^1 + 3^2 + \dots + 1995^{1994} + 1996^{1995}.$$

2. Egy utas megtette az út felét. Ekkor elszundított, s csak akkor ébredt fel, amikor harmadakkora út állt előtte, mint amennyit átaludt. Az egész út hányadrészét aludta át?

3. A réten 25 állat legel: háromszor annyi tehén, mint ló, és kétszer annyi bány, mint disznó. Tudjuk, hogy nem minden ló szőre volt egyforma színű. Melyik állatból hány legel a réten?

4. Egy téglalap oldalai 10 és 20 cm hosszúak. Fel lehet-e darabolni két egyenes ollóvágással úgy, hogy a keletkezett darabokból egy négyzetet tudjunk összeállítani?

5. Megrajzoljuk egy trapéz egyik szárán lévő két szögének szögfelezőjét. Igazold, hogy a két szögfelező derékszöget zár be!

6. Egy tanuló rajzolt egy hatszöget, egy másik húzott egy egyenest, amely mind a hat oldalt metszette. Hogyan lehetséges ez?

7. Négy kártyát látsz az ábrán.



Minden kártya egyik oldalán betű van, a másik oldalán szám. El kell dönteni, hogy igaz-e a következő állítás: Ha egy kártya betűs oldalán magánhangzó van, akkor annak a számos oldalán páros szám áll. Legalább hány kártyát kell megfordítani a kérdés eldöntéséhez?

8. Van 10 dobozunk, bennük piros, fehér és zöld golyók. Bizonyítsd be, hogy található köztük két olyan doboz, hogy a bennük lévő golyókat összeöntve mind a három színből (külön-külön) páros számú golyó lesz! [◀](#) [»](#)

egy

II. forduló

1. Mekkora osztálylétszám esetén lehetünk biztosak abban, hogy van három olyan tanuló az osztályban, akinek ugyanabban a hónapban van a születésnapja? Hány tanuló esetén fordulhat elő, hogy nincs 15 tanuló, akinek 1996-ban a születésnapja a hét ugyanazon napjára (például hétfőre) esik?

2. Egy dominó a sakktáblának pontosan két négyzetét fedi le. 31 dominóval le lehet-e a sakktáblát fedni úgy, hogy csak a bal felső (a8) és a jobb alsó (h1) mező ne legyen betakarva?

3. Egy üzemben olomtömbökből készítenek alkatrészeket, mindegyikből egyet. Három tömb megmunkálása során annyi forgács keletkezik, amennyiből egy újabb tömböt lehet önteni. 29 tömbből hány alkatrészt lehet készíteni?

4. Ha egy számot a nála 1598-cal kisebb számmal elosztunk, akkor a hányados 5, a maradék 6 lesz. Melyik ez a szám?
5. Mekkora annak a háromszögnek a területe, amelynek csúcspontjai a koordináta-rendszerben: A(6;1); B(5;8); C(2;4)?
6. Az óráam négy percet késik óránként. Három és fél órával ezelőtt pontosra állítottam. Most 12 óra van. Hány perc múlva mutat az óráam pontosan 12 órát?
7. Bizonyítsd be, hogy egy 1997 oldalú sokszögnek sosem lehet egy egyenessel minden oldalát (nem a csúcspontnál) metszeni!
8. A táblára az 1, 2, 3, ... , 1996 számokat írtuk fel. Szabad letörölni két számot, és helyettük felírni különbségük abszolútértékét. Így minden alkalommal csökken a felírt számok száma. El lehet-e érni, hogy a végén csak 0 legyen a táblán? [◀](#) [»](#)

III. forduló (döntő)

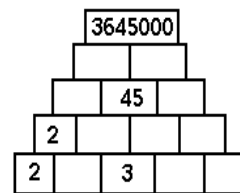
1. Az alábbi szorzásban némelyik számot betűk helyettesítene. Azonos betűk egyenlő számokat jelentenek. Mennyi a szorzás eredménye? (Az eredmény utolsó számjegye nulla.)
- $$\begin{array}{r} a3b \cdot 7c \\ db4 \\ \hline eef \\ ddg0 \end{array}$$
2. Adott egy ötjegyű szám: $7x18y$. Mekkora legyen x és y , hogy a szám osztható legyen 15-tel?
3. Amikor apám a 31. születésnapját ünnepelte, én éppen 3 éves voltam. Most apám háromszor annyi idős, mint én. Hány éves vagyok?
4. Egy ABC háromszög A-nál és B-nél lévő belső szögfelezői K-ban metszik egymást. Igaz-e, hogy az AKB háromszög tompaszögű? Miért?
5. Az $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + 92^3$ összegben mi lesz az egyesek helyén álló számjegy?
6. Az ABCD paralelogramma belsejében van a P pont. Bizonyítsd be, hogy az APB és CPD háromszögek területének összege fele a paralelogramma területének!
7. Három játékos megegyezett abban, hogy a vesztes minden játszma után megkészszerzi a többiek pénzét. Összesen három játszmát játszottak, és mindenki egyszer vesztett. A játék végén mindenkinek 16 forintja volt. Mennyi pénzük volt a játékosoknak a játék elején?
8. A és B város 42 kilométerre van egymástól. Dezső A-ból indul 10 km/óra, Feri B-ből ugyanakkor 18 km/óra sebességgel. Mennyi idő múlva lesznek B-től egyenlő távolságra, ha
- egy irányba,
 - ellenkező irányba indulnak? [◀](#) [»](#)

I. forduló

1. Egy egypúpú és kétpúpú tevékből álló csordában 32 fejet és 49 púpot számoltunk össze. Hány egypúpú teve van a csordában?

2. Egy állatkereskedésben kis- és nagy madarak kaphatók. A nagy madarak ára kétszerese a kismadarak árának. Bejön egy hölgy, aki öt nagy madarat és három kicsi madarat vásárol. Ha ehelyett három nagy madarat és öt kicsit vásárolt volna, 20 dollárral kevesebbet költött volna. Mennyibe kerültek a madarak?

3. A piramis számokból épül fel úgy, hogy minden téglalapban lévő szám az alatta lévő két szám szorzata. Írd be a hiányzó számokat! Melyik számot számoltad ki utolsónak?



4. Egy téglalapot az egyik csúcsából húzott egyenesekkel ossz fel:

a) 4 egyenlő területű részre!

b) 6 egyenlő területű részre!

5. Az 1997 szám elé x , a végére y számjegyet írunk. Az így kapott $\overline{x1997y}$ hatjegyű szám osztható 36-tal. Mennyi az x és az y értéke?

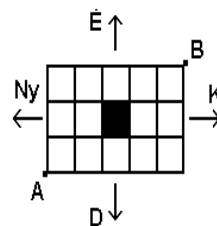
6. Franciaország történetében 1700 és 1900 között két fontos győzelmet jegyeztek fel április 22. napján. Állapítsd meg a két évszámot a következő feltételek ismeretében:

a) Az első és a második győzelem között pontosan 4382 nap telt el.

b) A számjegyek összege az első győzelem évszámában 23.

(Nem minden 4-gyel osztható évszám szökőév. Nézz utána!)

7. Egy hangya a konyhakövön A-ból B-be akar menni a négyzetek oldalain haladva úgy, hogy a befeketített négyzet egyik oldalán sem megy végig. Hányféle úton juthat célba, ha csak kelet és észak felé mozoghat? Ezek közül melyik a legrövidebb?



8. Egy segélyszállítmány, melyet a gyerekek számára kívántak szétosztani, kevesebb, mint 5000 darab narancsot tartalmaz. A narancsokat zacskókba rakták szét. Kiderült azonban, hogy 10-esével csomagolva az utolsó zacskóba csak 9 narancs jut. Amikor megpróbálták 9-esével szétosztani, az utolsó zacskó csak 8, majd amikor 8-asával, akkor meg az utolsó zacskó csak 7 narancsot tartalmazott. Az egyik csomagoló kiszámolta, hogy ha 7-esével, 6-osával, 5-ösével, 4-esével, 3-asával és 2-esével osztották volna szét, akkor sem sikerült volna maradék nélkül, mert az utolsó zacskóba rendre 6, 5, 4, 3, 2 és 1 jutott volna. Hány narancs érkezett a szállítmánnyal? ◀ ▶

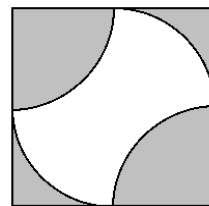
II. forduló

1. Melyik szám a nagyobb: 5^{600} vagy 3^{900} ?
2. Számológép használata nélkül számítsd ki a lehető legegyszerűbben az $x^2 + 32547817x - 11$ kifejezés értékét, ha $x = 67452183$!
3. Egy $42 \text{ cm} \times 38 \text{ cm}$ -es kartonpapírból felül nyitott dobozt készítünk. A hajtogatás előtt a lap sarkait kivágjuk. Mekkora a doboz térfogata, ha 1532 cm^2 területű papírból készül?
4. Egy baktériumtörzs nappal minden órában megduplázódik, de éjszaka (ami 11 órás) minden órában megfeleződik. Hányszorosára növekszik 7 nap alatt a baktériumtörzs?
5. Egy síelő kiszámította, hogy 10 km/h sebességgel haladva déli 1 órakor ér célba, 15 km/h sebességgel pedig már délelőtt 11 órakor. Pontosan délben szeretne megérkezni. Milyen sebességgel haladjon?
6. Egy derékszögű háromszög két hegyesszögének aránya $5 : 1$. Az átfogóhoz tartozó magassága 1 cm . Mekkora az átfogója?
7. Egy kőbányában 50 darab kőtömböt faragtak ki. A kövek sorba állíthatók úgy, hogy a sorban – a másodiktól kezdve – mindegyik kő tömege 2 kg -mal több, mint az előtte állóé. Az első kő tömege 370 kg . Elszállítható-e az összes kőtömb 7 darab 3 tonnás teherautóval, egyetlen fuvarban, túlterhelés nélkül? –
8. Leírtuk sorba egymás mellé a pozitív egész számokat:
123456789101112131415 ...
 - a) Az 1997-nek a 7-ese hányadik számjegy lesz a sorban?
 - b) Mi lesz a 2000. leírt számjegy? [◀](#) [▶](#)

III. forduló (döntő)

1. Az $1x59y$ ötjegyű szám osztható 30-cal. Mennyi az x és y számjegyek értéke?
2. Egy fából készült, zöldre festett kockát 125 egybevágó kis kockára daraboltunk. A kis kockák közül hánynak lesz
 - a) pontosan egy oldallapja zöld,
 - b) egyik oldallapja sem zöld?

3. Az egész síkidom területének hányadrésze a besatírozott terület, ha a négyzetbe egyenlő sugarú negyed köríveket rajzoltunk?



4. Egy apa 30 évvel idősebb a fiánál. 25 évvel ezelőtt háromszor annyi idős volt, mint a fia. Hány évesek most?

5. Egy könyv lapjait megszámoztuk 1-től 1997-ig. Hányszor fordult elő a számozásban az 1-es számjegy?

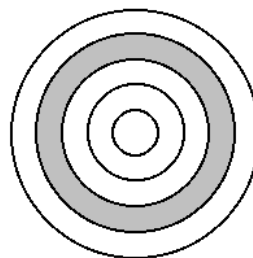
6. Valaki a 72000 Ft-os fizetését 10000-es, 5000-es és 1000-es címletű bankjegyekben kapta meg. Az 5000-es és az 1000-es bankjegyek száma megegyezik. Hány darab bankjegyet kaphatott a fizetéseként?

7. Hány olyan hatjegyű pozitív szám van, amelyben csak 0-ás és 1-es számjegyek vannak, de mindegyik legalább egyszer?

8. Egy $9\text{ cm} \times 16\text{ cm}$ -es téglalapban felvettünk 13 pontot. Mutasd meg, hogy a pontok között van kettő, amelyek távolsága 5 cm vagy annál kevesebb! [◀](#) [»](#)

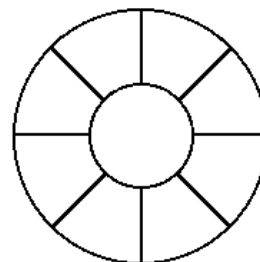
I. forduló

1. Egy apa, hogy fiát számolásra biztassa, megegyezik vele, hogy minden helyes számításért 8 forintot fizet a fiúnak, és minden rossz számításért 5 forintra "megbírságolja". 26 feladat után egyikük sem tartozott a másiknak semmivel. Hány feladatot oldott meg helyesen a fiú?
2. Aladár és Benedek 100 m-es futásban versenyeznek egymással. Aladár győz 10 m előnnyel. Úgy határoznak, hogy még egyszer rajthoz állnak, de most, hogy tisztességesebb legyen a dolog, Aladár 10 m-rel a startvonal mögött kezd. Feltéve, hogy mindketten ugyanolyan állandó sebességgel futnak, mint előzőleg, melyikük fog ezúttal nyerni: Aladár vagy Benedek? Vagy döntetlen lesz?
3. A háromszög egyik szögfelezője a szemközti oldallal 85° -os, egy másik szögfelezővel 54° -os szöget zár be. Mekkora a háromszög szögei?
4. A nyers szilvának 80 %-a víz. A nyers szilva szárításával nyert aszalt szilva 20 %-a víz. Hány kg nyers szilvából lesz 40 kg aszalt szilva?
5. Egy raktárból 21 egyenlő nagyságú tartályt kell elszállítani 3 tehergépkocsival. A tartályok közül 7 tele van, 7 üres, 7 pedig félig van. Hogyan rakhatók fel a 3 kocsira úgy, hogy mindegyikre ugyanannyi tömeg jusson? (A tartályok tartalmát nem lehet átönteni.)
6. Közös középponttal köröket rajzolunk úgy, hogy a sugaraik aránya $1 : 2 : 3 : 4 : 5$ legyen. A befestett körgyűrű területe hány százaléka a legnagyobb kör területének?
7. Van-e olyan háromszög, amelynek magasságai 1, 2 és 3 egység?
8. Hány olyan megoldása van az $|x| + |y| < 1000$ egyenlőtlenségnek, amelyben x , y egész számok? [◀](#) [▶](#)

**II. forduló**

1. Egy mesterlövész 5 lövést 5 másodperc alatt tud leadni, egy másik 10 lövést 10 másodperc alatt. (Feltételezzük, hogy az időmérés az első lövés leadásától az utolsó lövés elsütéséig tart, de a lövések maguk nem vesznek igénybe időt.) Melyik lövész tud rövidebb idő alatt leadni 12 lövést?
2. Melyik az a legkisebb, 72-vel osztható pozitív egész szám, amely csak 7-es és 0-as számjegyekből áll?

3. Egy szállítmányozási vállalkozónak a garázsába 8 teherautója már nem fért be. Ezért megnövelte a garázs méretét 50 %-kal, amely lehetővé tette, hogy a meglevőkön kívül még 8 teherautót helyezzen el. Hány teherautója volt?
4. Adjuk össze azokat a 2000-nél kisebb természetes számokat, amelyekben a számjegyek összege páros!
5. Az 1000-nél nem nagyobb pozitív egész számok közül hány olyan van, amelyik sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel nem osztható?
6. Egy tervező a következő, 9 táblából álló kerek ablak tervét készíti egy templom számára. Úgy gondolja, hogy az ablak akkor lesz esztétikai szempontból megfelelő, ha a külső 8 üvegtábla területe egyenként megegyezik a belső, kör alakú tábla területével. Feltéve, hogy a belső üveg átmérője 2 m, és az üvegtáblák közötti keret vastagsága elhanyagolható, hány méterese legyenek a külső betéteket elválasztó küllők?
7. Kifizethető-e 500 Ft pontosan 20 db pénzérmével, ha az érmék között csak 50 Ft-os, 20 Ft-os és 5 Ft-os szerepelhet?
8. A P pont az ABCD téglalap AB oldalának B-hez közelebbi ötödölő pontja, Q pedig a BC oldal C-hez közelebbi harmadoló pontja. Mekkora az ABCD téglalap területe, ha a PQD háromszög területe 156 cm^2 ? [◀](#) [»](#)



III. forduló (döntő)

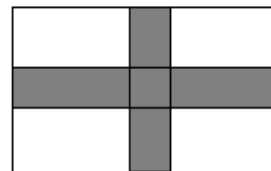
1. 700 Ft-om van tízforintos és húszforintos címletekben. A tízforintosok és a húszforintosok aránya $13 : 11$. Hány darab tízforintosom és húszforintosom van összesen?
2. Egy magnó árát kétszer egymás után 20-20%-kal csökkentették, majd 40%-kal növelték. Hány %-kal változott a magnó ára a háromszoros árváltozás után?
3. Oldd meg az alábbi egyenleteket az egész számok halmazán!

a) $3,5(x - 3)(x + 2)(x - 4,5) = 0$

b) $\frac{4x + 7}{x + 2} = \frac{2x + 3}{2 + x} + 1$

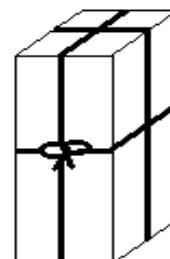
4. A 40-nél kisebb természetes számok közül 8 egymást követő számot összeszorozunk, és így egy olyan szorzatot kapunk, amelyik pontosan két 0-ra végződik. Hányféle ilyen szorzat létezik?

5. Egy téglalap alakú kartonlapra az ábra szerint keresztet rajzoltunk. A vízszintes csík területe 40 cm^2 , a függőleges csík 50 cm^2 , a téglalap területe 400 cm^2 . A téglalapnak hányadrészét fedi le a kereszt?



6. Egy háromszög két belső szöge 53° és 61° . Mekkora szöget zár be egymással a harmadik csúcshoz tartozó magasságvonal és a belső szögfelező?

7. Egy téglatest alakú csomagot a lapok középvonalai mentén az ábrán látható módon zsineggel kötünk át. Mennyi a téglatest térfogata, ha az átkötéshez 175 cm zsinetet használtunk fel, amelyből 15 cm kellett a csomózáshoz, és a csomag éleinek aránya $7 : 5 : 4$?



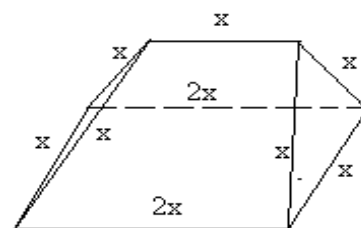
8. Egy sakkversenyen tizenhárman vesznek részt, és mindenki csak egyszer játszik minden ellenfelével. Hány mérkőzésre van szükség ahhoz, hogy

- a) mindenki pontosan hat ellenfelével játsszon,
- b) mindenki pontosan hét ellenfelével játsszon? [◀](#) [»](#)

I. forduló

1. Szegő Gábor 1895-től 1985-ig élt. 12 éves korában már Szolnokon, a Magyar Királyi Főgimnáziumban (későbbi nevén Versey Ferenc Gimnázium) volt diák. Milyen A és B esetén osztható az 1895A1985B tízjegyű szám 12-vel?
2. Egy osztály létszáma 30. Az osztály tanulói háromféle edzésre járnak: röplabda, kézilabda és kosárlabda edzésre, minden diák legalább az egyikre. 12-en röplabdáznak, 13-an kézilabdáznak, 16-an kosaraznak. Tudjuk, hogy csak egy diák jár mindhárom edzésre. Hány olyan diák van az osztályban, aki pontosan kétféle edzésre jár?
3. Egy 4×4 -es táblázatba írt úgy számokat, hogy a számok összege minden sorban pozitív, ugyanakkor minden oszlopban negatív legyen!
4. Tekintsük az $1 + 2 + 3 + \dots + 1997 + 1998 + 1999 = 1999 + 2000$ (hamis) egyenlőséget! A kifejezésben szereplő “+” jelek közül akárhányat “-” jelre változtathatunk. Igazzá tehető-e így az egyenlőség?
5. Melyik az a legkisebb olyan szám, amely 72-vel osztható, és (tíz-es számrendszerben felírva) csak a 2-es és 0-ás számjegy szerepel benne?
6. A nyolcadikosok klubdelutánt rendeztek. A következő nap osztályfőnöki órán az osztályfőnök mindenkit megkérdezett, hogy hány osztálytársaival táncolt. Az alábbi válaszok születtek: 8, 2, 0, 3, 6, 5, 0, 0, 4, 6, 5, 5, 3, 6, 4, 4, 3, 1, 1, 0, 4, 3, 6, 3, 3, 2, 1, 4, 1, 0, 2. Az osztályfőnök a végén megszólalt: “Valaki biztosan rosszul emlékszik!” Miből jött rá ilyen rövid idő alatt?
7. Egy kerékpáros 3 órahosszat kerékpározott. Bármely kétórás időszak alatt 20 kilométert tett meg. Lehetséges-e az, hogy a 3 óra alatt megtett út több, mint 30 km?

8. Egy háztető alapja téglalap, melynek oldalai x és $2x$ hosszúságúak, továbbá az összes tetőgerinc hossza szintén x . A tető háromszög alakú oldallapjának területe 40 m^2 . Mekkora az egész tető területe? [◀](#) [▶](#)

**II. forduló**

1. Mikor született az az ember, aki 1991-ben annyi idős volt, mint születési éve számjegyeinek az összege?
2. Hány olyan ötjegyű szám van, amelynek a számjegyei 4-nél nagyobbak, és egymás mellett nem fordul elő két kilences?

3. Bizonyítsd be, hogy egy 6 tagú társaságban mindig van 3 olyan ember, akik ismerik egymást, vagy 3 olyan ember, akik nem ismerik egymást! (Az ismeretséget mindig kölcsönösnek tekintjük.)
4. Legyen ABCD olyan paralelogramma, amelynek AB oldala kétszer olyan hosszú, mint az AD oldal, és a közbezárt szög 60° . Legyen a BEFC egy rombusz, ahol az E pont az AB szakasznak a B-n túli meghosszabbításán fekszik. Melyik szakasz a hosszabb: a BD vagy a BF?
5. A négyjegyű számokat két csoportra osztjuk aszerint, hogy felírhatók-e két kétjegyű szám szorzataként, vagy sem. Melyikből van több?
6. 49 pozitív egész szám összege 999. Határozd meg ezen számok legnagyobb közös osztójának lehetséges legnagyobb értékét!
7. Egy darab papírt felvághatunk 8 vagy 12 darabra, a kapott darabok bármelyikét újra felvághatjuk 8 vagy 12 darabra, és így tovább. Elérhető-e néhány ilyen darabolással, hogy 60 papírdarabunk legyen? És a 65-öt elérhetjük-e?
8. Az ABC háromszög AB oldalát B-n túl $2AB$ -vel, BC oldalát C-n túl $2BC$ -vel, AC oldalát A-n túl $2AC$ -vel meghosszabbítjuk. Így kapjuk a C' , A' , B' pontokat. Hányszorosa az $A'B'C'$ háromszög területe az ABC háromszög területének? [◀](#) [»](#)

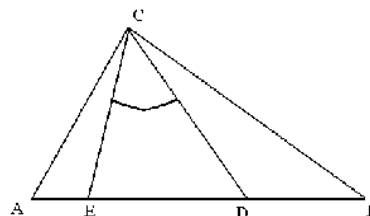
III. forduló (döntő)

1. Rendezd az alábbi számokat növekvő sorrendbe!

$$44^4; \quad 4^{44}; \quad 4^{(4^4)}; \quad (4^4)^4$$

2. A ♥ jellel szimbolizált művelet bármely valós a és b szám esetén a következő: $a \heartsuit b = ab + a + b$. Ha $3 \heartsuit 5 = 2 \heartsuit x$, akkor mennyi x értéke?

3. Egy ABC háromszög AB oldala a leghosszabb. Az AB oldalon adott két pont: D és E, amelyekre $AD = AC$ és $BE = BC$. A C-nél levő szög az EDC háromszögben 45° -os. Mit mondhatunk az ABC háromszögről?



4. Amikor a 2000 m-es futóverseny győztese átszakítja a célszalagot, Dezső 200 méterrel, Elemér pedig 290 méterrel van mögötte. Tegyük fel, hogy mindkét fiú eddigi átlagsebességének megfelelő egyenletes sebességgel fut tovább. Amikor Dezső célba ér, hány méterrel lesz mögötte Elemér?
5. Egy 5×5 -ös táblázatba lehet-e úgy számokat írni, hogy e számok összege pozitív, ám a táblázat bármely 2×2 -es részében a számok összege negatív?

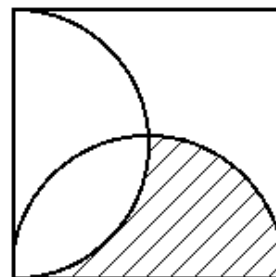
6. Az ABCDEF szabályos hatszög csúcspontjait középpontosan tükröztük, mégpedig az A csúcsot a B csúcsra, a B csúcsot a C csúcsra, a C csúcsot a D csúcsra, és így tovább; végül az F csúcsot az A csúcsra. A tükröképeket jelöljük rendre A'-vel, B'-vel, ... F'-fel. Határozd meg, hogy az A'B'C'D'E'F' hatszög területe hányszorosa az ABCDEF hatszög területének!
7. Egy négyzetes oszlop alakú edényben víz van. Az oszlop alapéle 12 cm. Az edénybe beledobunk 36 darab egybevágó kockát. A kockák teljesen elmerülnek a vízben, a víz szintje 2 cm-t emelkedik, és az edényből nem folyik ki víz. Mekkora egy ilyen kocka felszíne?
8. Egy számot 25-tel osztva a maradék 1, 80-nal osztva a maradék szintén 1. Mennyi lehet a maradék, ha ugyanazt a számot 2000-rel osztjuk? [◀](#) [»](#)

I. forduló

1. András 9 métert, Dani 12 métert korcsolyázik másodpercenként. Egy verseny alkalmával Dani 120 méter előnyt ad Andrásnak. Hány másodperc múlva éri utol Dani Andrást?
2. Az ABC háromszögben a C csúcsnál 90° -os, az A-nál pedig 30° -os szög van. Milyen hosszú AC, ha a C csúcs az AB oldaltól 5 cm távolságra van?
3. A $2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \dots$ sorozatban található-e két olyan különböző szám, melyek különbsége osztható 75-tel?
4. Egy hegyesszögű háromszög három szöge közül az egyik nyolccal, a másik kilenccel, a harmadik tizenkettővel osztható. Hány fokosak a háromszög szögei?
5. Amikor Kolja annyi idős volt, mint most Olja, Polja néni olyan idős volt, mint Kolja és Olja most együttesen. Milyen idős volt Kolja, amikor Polja néni olyan idős volt, mint Kolja most?
6. Hány teherhordóra van szüksége annak a kutatónak, aki hatnapos sivatagi átvonuláshoz akar hozzáfogni, ha mindegyikük – így ő maga is – 4 napi vízmennyiséget és élelmiszerkészletet tud magával vinni csak egy személy részére?
7. Egy 24 cm^2 területű konvex négyszöget átlói négy olyan háromszögre bontanak, melyek közül két szomszédosnak a területe 3 cm^2 , illetve 5 cm^2 . Mekkora a másik két háromszög területe?
8. Amikor az 5000 méteres futóverseny győztese áthalad a célon, Béla 500 méterrel, Csaba 725 méterrel van a győztes mögött. Ha mindketten az eddigi átlagsebességgel haladnak a cél felé, akkor Csaba hány méterrel lesz az éppen célba érkező Béla mögött? [◀](#) [»](#)

II. forduló

1. Hány körte volt abban a kosárban, melynek tartalmát három testvér között úgy osztották szét, hogy az egyik kapta a körték felét meg egy fél körtét, a második kapta a maradék felét meg egy fél körtét, a harmadik az így megmaradtak felét és egy fél körtét, és még négy körte maradt a kosárban úgy, hogy az osztozkodásnál a körtét nem vágták szét?
2. Mekkora lehetnek a téglalap oldalai, ha tudjuk, hogy centiméterekben mérve egész számok, és a téglalap kerülete ugyanannyi cm, mint ahány cm^2 a területe?
3. Az ábrán egy 1 dm oldalú négyzetet látsz, aminek két szomszédos oldalára mint átmérőre, egy-egy félkört rajzolunk. Határozd meg a sárgázott rész területét!



4. Hajtsunk félbe egy újságlapot! Hajtsuk félbe még egyszer! Végezzük el ezt 10-szer egymás után! Milyen vastag lapot kapnánk, ha egy újságlapot 0,1 mm-nek veszünk? Milyen vastag lapot kapnánk, ha 20-szor ismételnénk a hajtogatást?

5. Az ABCD téglalap oldalaira kifelé rajzoltuk az ABX, BCY, CDV, DAW szabályos háromszögeket. Bizonyítsd be, hogy az AXW, BXY, CVY, DWV háromszögek területének összege egyenlő a téglalap területével!

6. Számítsd ki a következő kifejezés pontos értékét!

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2000}\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \dots + \frac{2}{2000}\right) + \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{5} + \dots + \frac{3}{2000}\right) + \dots + \left(\frac{1999}{2000}\right) = ?$$

7. Egy sakktáblán (64 mezővel) 50 mezőt megszámoztunk 1-től 50-ig. 50 bábút (1-től 50-ig) elhelyeztünk rajta tetszés szerint. Egy tetszőleges bábút egy húzással tetszés szerinti szabad mezőre helyezhetünk. Bizonyítsd be, hogy legföljebb 75 húzással mindegyik bábu a számának megfelelő mezőre kerül!

8. Levente, Szabolcs, Árpád és Béla a "legjobb horgász" megtisztelő címért vetélkedtek. Ámde nem minden hal egyforma, megegyeztek hát, hogy minden halat különbözőképpen értékelnek majd. Aki egy fogast fog, 5 pontot kap, egy dévérkeszegért 4, egy sügérért 2, egy durbincsért pedig 1 pont jár. Az egyetlen fogast Levente fogta. Később három sügért fogtak. A kifogott halakért együtt 18 pontot osztottak szét. A legkevesebb pontot Szabolcs kapta, pedig több halat fogott ki a vízből, mint a többiek. Szabolcs és Árpád együtt ugyanannyi pontot szereztek, mint Levente és Béla. Végül mindegyiküknek különböző pontszámuk volt. Derítsd ki mindegyik horgász teljesítményét! [◀](#) [»](#)

III. forduló (döntő)

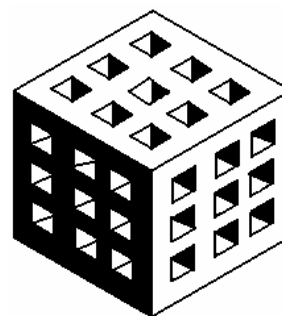
1. Négy diák: Anna, Beáta, Cecília és Dóra egy vízibiciklit bérelt 900 Ft-ért egy órára. Anna harmadannyit fizetett, mint a másik három lány együtt. Beáta negyedannyit, mint a másik három lány együtt, Cecília pedig ötödannyit, mint a másik három lány együtt. Mennyit fizetett Dóra?

2. Egy téglatest egy csúcsából kiinduló három éle hosszának összege 200 cm, az élek aránya $5 : 7 : 13$. Hány dm^2 a téglatest felszíne, és hány m^3 a téglatest térfogata?

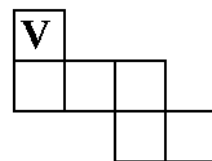
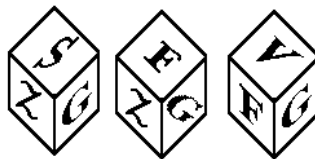
3. Oldd meg a következő egyenletet!

$$\frac{4x+5}{x+2} + 3 = \frac{x-1}{x+2} + 6.$$

4. Egy kockának 7 cm hosszúak az élei. Az alábbi módon lyukakat vágunk bele. Minden lyuk $1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$ -es alapú négyzetes oszlop, amelynek oldalélei merőlegesek a kocka oldallapjára. A 27 lyuk szimmetrikusan helyezkedik el, amint az ábrán látható. Mekkora az így kilyuggatott kocka térfogata?

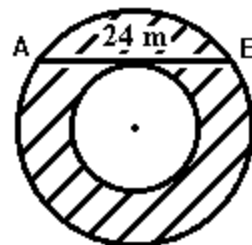


5. Itt látható ugyanannak a kockának három nézete. Másold le, és egészítsd ki a hálózátát!



6. Oldd meg a következő egyenletet az egész számok halmazán: $2x^3 + xy - 5 = 0$!

7. Egy iparost megbíztak a színház körfolyosójának kövezésével. A körfolyosó körgyűrű alakú, az ábrán a vonalkázott terület. A munka felmérésekor az ábrán látható vázlatot készítette magának a burkoló (az A és B pontok távolsága 24 m). Számítsd ki forint pontossággal, mennyit fog kifizetni a színház a munkáért, ha 1 m^2 kövezés ára munkadíjjal, anyagköltséggel együtt 5000 Ft!



8. Lehetnek-e az $n + 17$, $n + 19$ és az $n + 21$ számok n ugyanazon értékére egyszerre prím számok (n természetes számot jelöl)? [▶](#) [»](#)

I. forduló

1. Egy derékszögű háromszög szögei növekvő sorrendben α , β és γ . α ugyanannyival kisebb β -nál, mint amennyivel γ nagyobb, mint β . Mekkora a háromszög szögei?
2. Egy háromjegyű szám első és harmadik számjegyének összege 9. Ha az első és a harmadik számjegyet felcseréljük (miközben a másodikat változatlanul hagyjuk), az eredetinel 693-mal nagyobb számot kapunk. Határozd meg az eredeti számot!
3. Egy osztály a tanév folyamán három kirándulást szervezett. Az első, a második és a harmadik kiránduláson rendre a tanulók 70, 80, illetve 90 százaléka vett részt. Így tizenkét tanuló háromszor, a többi pedig kétszer kirándult. Hány tanuló jár az osztályba?
4. Határozd meg a 10^{2001} -2002 szám tízes számrendszerbeli alakjában a számjegyek összegét!
5. Törpilla szeretné kifesteni a lakását. Ehhez egy teli vödörben pontosan annyi festéke van, amennyi szükséges. De a gonosz Hókuszpók a ház és a vödör minden hosszmeretét kétszeresére varázsolja úgy, hogy a vödör továbbra is tele van festékkal. Ki tudja-e festeni ennyi festékkal Törpilla a házát? Válaszodat indokold!
6. Triangulum országának királya, Triász egy szabályos háromszög alapú, hasáb alakú tortát kap születésnapjára. Logicus Mathematicus, az udvari matematikus a háromszög minden oldalfelező pontjából merőlegest állít a szomszédos oldalakra, és az így kapott, hat egyenes által határolt hatszög mentén fölívja a tortát. A középső, hatszög alapú hasáb alakú rész a királyé, a maradék pedig a királynét, Trianát illeti. Ki kap több tortát: Triász vagy Triana?
7. Pista egyik barátja a (kilencjegyű) telefonszámát úgy írta le egy papírra, hogy az első három számjegy alá a második három került, az alá pedig az utolsó három. Pista észrevette, hogy az így keletkezett 3×3 -as négyzetrács minden sorában és oszlopában, továbbá mindkét átlóban a számok összege ugyanannyi. A papír elszakadt, és csak az első oszlop maradt meg belőle (lásd az ábrát). Pista közben elfelejtette barátja telefonszámát, és szeretné felhívni. Segíts neki!
8. Egy 20 méter átmérőjű, kör alakú virágágyás körüli kerítés olyan egyenes szakaszok mentén húzódik, melyek mindegyike érinti valahol a virágágyás szélét. Milyen hosszú a kerítés, ha a bekerített terület 390 m^2 ? [◀](#) [»](#)

7		
2		
6		

III. forduló (döntő)

1. Oldd meg a következő egyenlőtlenségeket és egyenletet!

a) $x^2 < x$ b) $|x| < x$ c) $\frac{7}{3}\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{4}\right) - \frac{4}{5}\left(\frac{5x}{6} - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{5}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\right)$

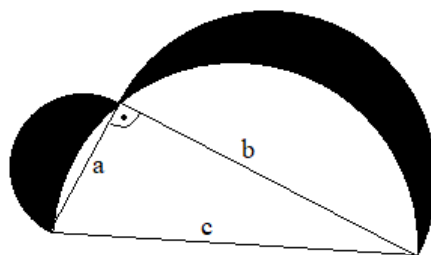
2. Hány különböző négyjegyű szám készíthető két 1-es, egy 2-es és egy 3-as számjegyből?

3. Egy téglalap két szemközti oldalát 2,1 cm-rel növelve olyan téglalapot kapunk, melynek a területe 8,4 cm²-rel, az eredeti terület 1,2-szeresére növekszik. Mekkora volt az eredeti téglalap kerülete?

4. Egy könyv lapjai 3-tól 555-ig vannak számozva. Hányszor fordult elő a számozásban az ötös számjegy?

5. Egy szabályos háromszög körül írható körének sugara 4 cm-rel hosszabb, mint a beírható kör sugara. Mekkora a háromszög oldala?

6. Az ábrán lévő holdacskákat a derékszögű háromszög oldalai fölé szerkesztett félkörök határolják. A háromszög két oldala: $a = 5$ cm és $b = 12$ cm. Mekkora a besötétített rész területe?



7. Ábrázold koordináta-rendszerben azokat a pontokat, melyek x és y koordinátáira teljesül az alábbi 4 feltétel!

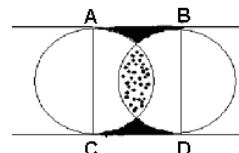
$$x \geq 0; \quad y \geq 0; \quad y \leq 10 - x; \quad 3y + 5x \geq 15.$$

8. Egy kocka élét jelöljük a -val! A kockából minden csúcsánál vágjunk ki egy-egy $\frac{a}{4}$ élű kis kockát! A megmaradó test térfogata hányadrésze az eredeti test térfogatának? Hogyan változik a test felszíne? [◀](#) [»](#)

I. forduló

1. Három szám összege 33,7. Az első $\frac{2}{3}$ része egyenlő a második $\frac{5}{8}$ részével; a második $\frac{5}{12}$ része pedig egyenlő a harmadik $\frac{7}{18}$ részével. Határozd meg a számokat!

2. Az ábrán látható egységsugarú körök közös érintőinek érintési pontjai A, B, illetve C, D. Mekkora a körök középpontjainak távolsága, ha a fekete rész területe egyenlő a pontozott rész területével?



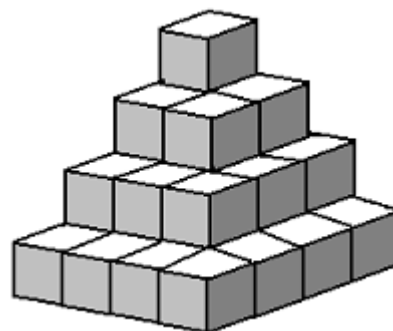
3. Egy iskola tanulójának létszáma 200-nál több, de 1000-nél kevesebb. Határozd meg az iskola tanulójának létszámát, ha tudjuk, hogy 6-os, 7-es, 8-as oszlopokba sorakoztatva három tanuló mindig kimarad, míg ha 9-es oszlopba sorakoznak, akkor minden sor teljes!

4. Határozd meg az A szám utolsó számjegyét, ha

$$A = 1997^{1997} + 1997^{1998} + 1997^{1999} + 1997^{2000} + 1997^{2001} + 1997^{2002}$$

5. Az ABC háromszögben a β és a γ hegyesszög, az AD a BC oldalhoz tartozó magasság (a D pont illeszkedik a BC oldalra), az AE a BAD szög szögfelezője (az E pont is illeszkedik a BC oldalra). Bizonyítsd be, hogy az ABC háromszög derékszögű, ha $AC = CE$!

6. Egy kocka 16 cm-es éleit osszuk 4 egyenlő részre ($n = 4$) és szeleteljük az osztópontok mentén kis kockákra. Az ábrának megfelelően hagyjunk el kis kockákat az egyes sorokból, mégpedig úgy, hogy a legfelsőben 1, az alatta következőben 4, majd 9 és végül 16 maradjon. Mekkora az így megmaradó test felszíne? Mekkora lesz a felszín, ha $n = 8$?



7. Mutasd meg, hogy az

$$A = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{1988} + 5^{1989} + 5^{1990}$$

sorszám osztható 71-gyel!

8. Oldd meg az egész számok halmazán a következő egyenletet: $2 \cdot (x + y) = x \cdot y$! [◀](#) [▶](#)

II. forduló

1. Egy szultán, akinek 143 felesége volt, 1000 napon keresztül adót szedett. Az első napon 144 aranyat, a többi napokon pedig mindig egy arannyal többet szedett, mint az azt megelőző napon. Az így beszedett adót egyenlően akarta szétosztani a feleségei között. Meg tudta-e tenni?

2. Hamupipőkének egy zsák lencsével összekevert babot kellett szétválogatnia. A lencse és a bab tömegének az aránya 2 : 3 volt. Hamupipőke mostohájának úgy tűnt, hogy kevés a lencse,

ezért még 2 kg lencsét a zsákba szórt. Így a lencsének a babhoz való aránya annyi lett, mint amennyi előtte a bab aránya volt a lencséhez. Végül hány kg lencsét és hány kg babot kellett Hamupipókének szétválogatnia?

3. Mennyi az x , ha $||x| - 1| - 1| = 0$, ahol $|x|$ az x abszolút értékét jelöli?

4. Egy 60° -os szögtartományba úgy írunk köröket, hogy azok a szögszárakat, és a szomszédos körök egymást kívülről is érintik. Az első kör sugara egységnyi. Mekkora a tizedik kör sugara?

5. Adott egy kocka, melynek éle a . Mekkora a kocka lapjainak középpontjai által meghatározott test (oktaéder) és az eredeti kocka térfogatának aránya?

6. Hét bolygó mindegyikén egy-egy csillagász figyeli a hozzá legközelebbi, a sajátjától különböző bolygót. A bolygók közötti távolságok mind különbözőek. Mutasd meg, hogy van olyan bolygó, amelyet egyik csillagász sem figyel!

7. Egy 29 fős osztálynak 3 kérdést tettek fel. Mindenki igennel vagy nemmel válaszolt.

1. Szeretted-e a matematikát?
2. Szeretted-e a fagyaltot?
3. Szeretted-e a palacsintát?

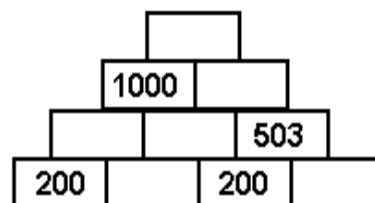
Az első kérdésre 22-en, a másodikra 18-an, a harmadikra szintén 18-an feleltek igennel. A matematikát szeretők közül 7-en a fagyaltot, 8-an a palacsintát nem szeretik. 12-en szeretik a fagyaltot és a palacsintát, de közülük 2 nem szereti a matematikát. Hányan válaszoltak nemmel mindhárom kérdésre?

8. Egy kockát piros, fehér és zöld egybevágó kockákból rakunk össze. A kockák számának $\frac{13}{72}$ része piros, $\frac{25}{48}$ része fehér. A zöld kockák száma kevesebb, mint 1000. Hány kockából áll a nagy kocka, mennyi ebből a piros, mennyi a fehér, és mennyi a zöld kocka? [◀](#) [»](#)

III. forduló (döntő)

1. Egy CD-lemez árát először egy nyolcad részével megemelték, majd 10 %-kal mérsékeltek, így most a lemez 1620 Ft-ba kerül. Mennyibe került a lemez eredetileg?

2. A számpiramis mindegyik téglalapjában található szám az alatta elhelyezkedő két szám összege. Melyik szám van a piramis csúcsán?



3. Panni két hétre sítáborba utazott. A táborhelyen minden negyedik napon délelőtt, 6 naponta pedig délután esett a hó. Minden harmadik napon tortát is adtak az ebédhez. A második napon délelőtt is, délután is havazott, és aznap torta is volt ebédre.

a) Mikor fordult ez legközelebb elő?

b) Hányszor fordult elő a két hét során, hogy délelőtt és délután is havazott?

4. Felírtunk a táblára egy négyjegyű számot, melynek utolsó jegye 3. Ha ezt letörölnénk, és a szám elejére íránk, az eredetinel 1197-tel nagyobb számot kapnánk. Melyik számot írtuk (eredetileg) a táblára?

5. Egy 9 cm élű kockát befestünk. Ezután minden élt megharmadoljuk, majd a harmadoló pontok mentén az élre merőleges síkokkal felvágjuk a nagy kockát kis kockákra. Így a kis kockáknak lesznek festetlen lapjai is. A festetlen lapok területének összege hány százaléka a festett lapok területösszegének?

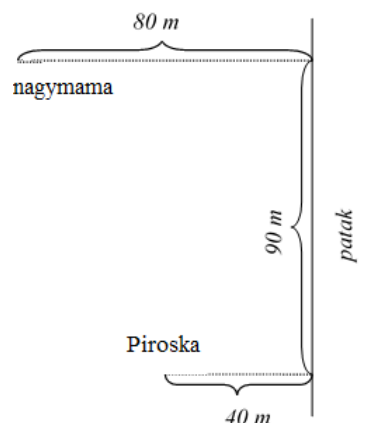
6. Abdul, a bölcs börtönbe került. Hasszán, a fogvatartója azt ígérte neki, hogy ha megtalálja azt a bűvös (kétjegyű) számot, amelyből a számjegyeinek összegét kivonva egy másik bűvös számot, a 13-at kapjuk eredményül, kiszabadul. Mikor szabadul ki Abdul?

7. Mi az utolsó számjegye a $2002^{2003} + 2003^{2002}$ számnak?

8. Piroska és a nagymama is ugyanazon a réten lakik. Piroskáék háza 40 méterre, a nagymama háza pedig 80 méterre van a pataktól. Piroska szeretné meglátogatni a nagymamát úgy, hogy közben vizet is visz neki a patakról.

a) Merre menjen Piroska?

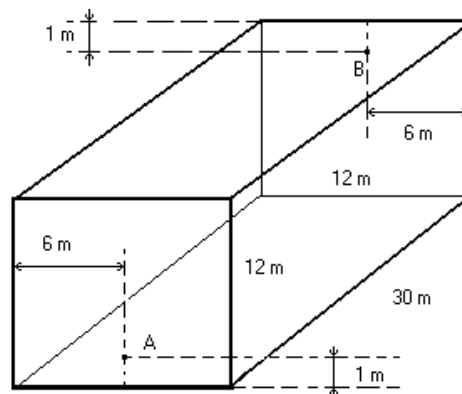
b) Milyen hosszú a lehető legrövidebb ilyen út? ◀ ▶



I. forduló

1. A szegény ember találkozik az ördöggel, aki üzletet ajánl neki: ahányszor kezét fognak, annyszor megháromszorozza a zsebében levő garasokat, azonban cserébe az ördög minden alkalommal 27 garast kap. Megegyeznek. Háromszori kézfogás után azonban elfogy a szegény ember pénze. Hány garasa volt eredetileg?
2. Egy derékszögű háromszög átfogója az egyik befogó kétszerese. Egy másik derékszögű háromszög külső szögeinek aránya $3 : 4 : 5$. Hasonló-e a két háromszög?
3. Hány darab olyan háromjegyű szám van, amelyben a számjegyek szorzata páratlan?
4. A 8×8 -as sakktábláról levágtuk a bal alsó sarkot. A maradék 63 mező lefedhető-e 1×3 -as dominókkal? (A dominók hézagmentesen, egyrétűen kell fedjék a táblát, és nem lóghatnak le róla.)
5. Dolgozatírás közben Sanyi az órájára pillantva megállapította, hogy a dolgozatírás idejéből kétszer annyi telt el, mint amennyi még hátra van. 5 perc múlva ez az arány már 5. Hány perces a dolgozat?
6. Tekintsük azokat a háromszögeket, amelyek csúcspontjainak koordinátái egy síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben a $-1, 0, 1$ számok közül valók! Milyen értékeket vehet fel egy ilyen háromszög területe?
7. A $30 \times 12 \times 12$ m-es, téglatest alakú szerelő-csarnokban két pontot (A; B) huzallal kell összekötnünk, mely a falakon, a mennyezeten és a padlón keresztül haladhat. Mekkora ennek a huzalnak a lehető legkisebb hossza?
8. Add meg mindazokat a természetes számokat, amelyek az alábbi tulajdonságok mindegyikével rendelkeznek:

- (1) oszthatók 8-cal;
- (2) számjegyeinek összege 7;
- (3) számjegyeinek szorzata 6! [▶](#) [»](#)



II. forduló

1. Hogyan kell elosztani 46 diót Anna, Béla és Cili között, ha Anna dióinak a száma $\frac{2}{3}$ -a Béla diói számának, és 75%-a Cili diói számának?

2. Egy kosárban 500-nál kevesebb retek van. Ha hatosával kötjük őket csomóba, akkor 5, ha hetesével, akkor 6, ha nyolcasával, akkor 7 retek marad ki. Hány retek van a kosárban?

3. Melyek azok az x racionális számok, amelyekre igaz, hogy

$$\text{a) } \frac{1}{x} > x \quad \text{b) } |x| \leq x \quad \text{c) } |x| > x^2 ?$$

4. Döntsd el, hogy prímszám-e a következő!

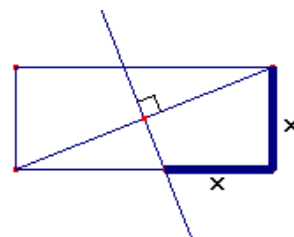
a) a tízes számrendszerben felírva 2003 jegyű szám:

$$\begin{array}{ccccccc} 10 & \dots & 010 & \dots & 01 \\ & & 1000 \text{ db} & & 1000 \text{ db.} \end{array}$$

b) az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek mindegyikének pontosan egyszeri felhasználásával alkotott bármelyik hatjegyű szám.

5. Egy fakocka éle centiméterekben mérve egész szám. A kockát pirosra festjük, majd az éleivel párhuzamosan 1 cm élű kis kockákra vágjuk. Hány cm az eredeti kocka éle, ha azoknak a kis kockáknak a száma, amelyeknek pontosan 2 lapja piros, 12-szer annyi, mint azoknak a száma, amelyeknek pontosan 3 lapja piros?

6. Egy téglalap egyik átlójának felezőmerőlegese a hosszabbik oldalból a rövidebbel egyenlő hosszúságú szakaszt metsz le. Mekkora szöget zárnak be a téglalap átlói?



7. Egy egységnyi oldalú négyzetbe tetszőlegesen elhelyezünk

5 pontot. Bizonyítsd be, hogy mindig van köztük 2 olyan, amelynek távolsága nem nagyobb

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \text{-nél!}$$

8. Egy dobozban 36 db azonos méretű golyó van. Van köztük piros, kék, sárga és zöld színű. Ha találomra választunk közülük, akkor legalább 30 db-ot ki kell venni ahhoz, hogy biztosan mind a négy szín szerepeljen a kivett golyók között.

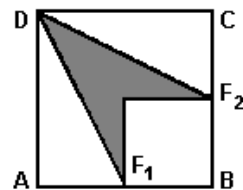
a) Legalább hány golyó van egy-egy színből?

b) Legfeljebb hány golyó lehet egy színből? [◀](#) [▶](#)

III. forduló (döntő)

1. Egy 36 fős osztály bankettet szervezett egy vendéglőben. Az étlapon egyebek mellett almatorta és borjúsült is szerepelt. A jelenlévők $\frac{2}{3}$ -a almatortát, $\frac{5}{9}$ -e borjúsültet, és 8 diák egyéb ételt rendelt. Hányan rendeltek az almatortából és a borjúsültből egyaránt?

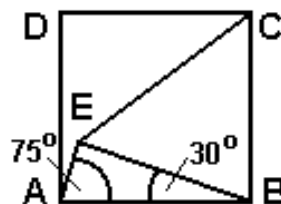
2. A befestett négyszög területe hányadrésze az ABCD négyzet területének, ha F_1 és F_2 oldalfelező pontok?



3. Egy tejárus 10 literes, tejjel teli edényből pontosan 1 liter tejet szeretne kimérni. Sajnos, ehhez csak egy 3 és egy 7 literes üres edény áll rendelkezésére. Hogyan kell eljárnia ahhoz, hogy az 1 liter tej kimérése közben ne legyen vesztesége?

4. Egy tapintatlan ember Zsuzsanna asszony életkora iránt érdeklődik. Zsuzsanna asszony így válaszol: „Életkorom éppen $\frac{4}{3}$ -a a hátralévő időm felének, ha 120 évig élnek.” Hány éves Zsuzsanna asszony?

5. Az ábrán látható 10 cm oldalhosszúságú négyzetbe egy háromszöget szerkesztünk, amelynek egyik szöge 75° , a másik 30° . Mekkora az EC távolság?



6. Egy bankkártya száma 14 számjegyből áll. A mellékelt ábrán látható kártyaszám bármely három szomszédos számjegyének összege 19. Add meg a hiányzó számjegyeket!

			8								6		
--	--	--	---	--	--	--	--	--	--	--	---	--	--

Válaszodat indokold!

7. Egy öreg mamutfenyőfa henger alakú törzsének 6 méter a kerülete. Egy csiga mászik fel rajta függőlegesen. Már 56 cm magasan van a földtől számítva. A fatörzs átlellenes oldalán egy másik csiga mászik felfelé, ugyancsak függőleges irányban. Neki már csak 4 cm hiányzik, hogy elérje a 4,6 méteres magasságot. Ekkor a két csiga megbeszéli, hogy az eredeti úticélt feladva a lehető legrövidebb úton egymás felé indulnak. Mekkora távolságot tesznek meg a csigák a találkozásig, ha a magasabban lévő csiga kétszer akkora sebességgel halad lefelé, mint a másik felfelé?

8. Egy természetes számhoz hozzáadjuk a számjegyeinek az összegét, és így 2004-et kapunk. Melyik ez a természetes szám? ◀ ▶

1. Jelölje a megye lakosainak számát a ! Ekkor $a = 420\,000$.

Foglaljuk táblázatba az ismert feltételeket!

	nagykorú férfi	nagykorú nő	fiú	lány
%	37	38	12	$100 - 37 - 38 - 12 = 13$
Olvasó (%)	65	50	15	5
Olvasó (fő)	$a \cdot 0,37 \cdot 0,65$	$a \cdot 0,38 \cdot 0,50$	$a \cdot 0,12 \cdot 0,15$	$a \cdot 0,13 \cdot 0,05$

A megye Új Néplapot olvasóinak száma: $a(0,37 \cdot 0,65 + 0,38 \cdot 0,50 + 0,12 \cdot 0,15 + 0,13 \cdot 0,05)$.

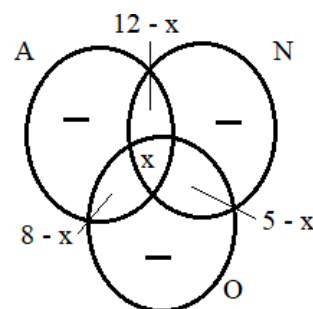
Ez a megye lakosainak $\frac{a(0,37 \cdot 0,65 + 0,38 \cdot 0,50 + 0,12 \cdot 0,15 + 0,13 \cdot 0,05)}{a} 100\% = 45,5\%-a$.

2. Ábrázoljuk halmazábrával az osztály tanulóit! Jelölje x a mindhárom nyelvet tanulók számát! Az ábra alapján a német nyelvet tanulók száma: $15 = (12 - x) + x + (5 - x)$. Ebből $x = 2$.

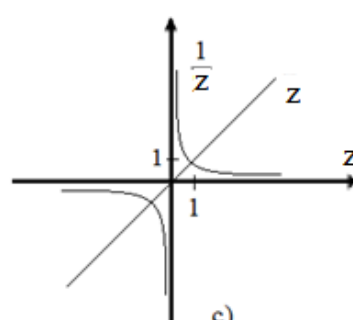
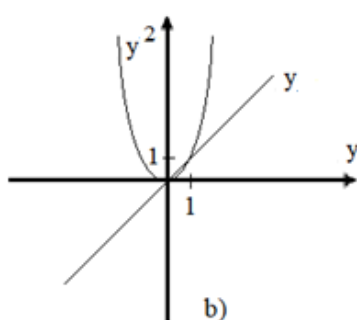
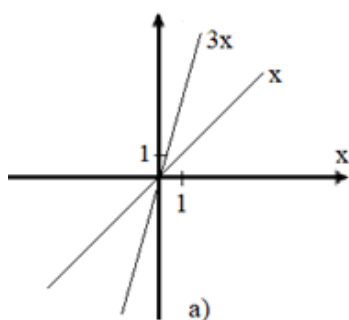
Az osztály létszáma:

$$(12 - x) + (8 - x) + (5 - x) + x = 25 - 2x = 25 - 4 = 21.$$

Az osztály létszáma tehát 21 fő.



3. Ábrázoljuk a feladatban szereplő összefüggéseket függvénykapcsolat formájában!



- a) $3x < x$, ha $x < 0$, $3x = x$, ha $x = 0$, $x < 3x$, ha $0 < x$.
 b) $y < y^2$, ha $y < 0$, vagy $1 < y$, $y = y^2$, ha $y = 0$ vagy $y = 1$, $y^2 < y$, ha $0 < y < 1$.
 c) $z < 1/z$, ha $z < -1$ vagy $0 < z < 1$, $z = 1/z$, ha $z = 1$ vagy $z = -1$, $z \neq 0$, $1/z < z$, ha $-1 < z < 0$ vagy $1 < z$.

4. Jelöljük a fiú születési évét n -nel! A feltételek szerint:

$$\frac{n}{2} - \frac{n+4}{3} = 331. \text{ Ebből } n = 1994. \text{ A gyerek 1994-ben született. A feladatot 1994-ben tűzték ki.}$$

Tehát a fiú 0 – 12 hónapos lehet (lehetett).

5. Egy x szám hetedrésze mindig kétszer van meg az x számban. Így a 0 kivételével minden szám megfelel. 0-nak a hetedrésze is 0, és ezzel nem lehet osztani.

6. Több megoldás is van. Egy lehetséges megoldás:

$$\begin{array}{llll} 0 = (9-9)1^4; & 1 = 1^4 + 9 - 9; & 2 = 4 - 1 - 9/9; & 3 = 4 - 1 - 9 + 9; \\ 4 = 4^1 + 9 - 9; & 5 = 4 + 1 - 9 + 9; & 6 = 4 + 1 + 9/9; & 7 = 9 - \sqrt{9} + 1^4; \\ 8 = 4 + 1 + 9/\sqrt{9}; & 9 = 9 + 1 + \sqrt{9} - 4; & 10 = 9 + 4 - 1\sqrt{9}; & 11 = 1 + 4 + 9 - \sqrt{9}; \\ 12 = \sqrt{9 \cdot 9} + 4 - 1; & 13 = 9 + 9 - 1 - 4; & 14 = 9 + 9 - 1 \cdot 4; & 15 = 9 + 9 - 4 + 1; \end{array}$$

$$16 = 9 + 9 - 1\sqrt{4}; \quad 17 = 9 + 9 - 1^4; \quad 18 = (9 - \sqrt{9})(4 - 1); \quad 19 = 9 + 9 + 1^4.$$

7. $A = 6a^2 = 24 \text{ cm}^2$. Ebből $a = 2 \text{ cm}$. A kocka egy lapjának területe: $a^2 = 4 \text{ cm}^2$. A kocka térfogata: $V = a^3 = 8 \text{ cm}^3$. A kiindulási kockából semmi sem látható. Így a test felszínét a ráragasztott kockák 5-5 lapjának területösszege adja.

$$\text{A test felszíne: } A_t = 6 \cdot 5a^2 = 30 \cdot 4 \text{ cm}^2 = 120 \text{ cm}^2.$$

$$\text{A test térfogata: } V_t = 7V = 56 \text{ cm}^3.$$

8. Jelöljük a hatszög területét t_h -val, a körét t_k -val!

A szabályos hatszög szögei $120^\circ (= 360^\circ/3)$ -osak.

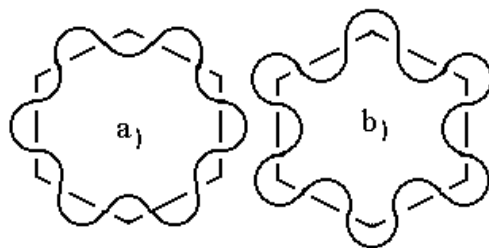
Az a) ábra esetén a csúcsoknál 6 db harmadkörrel csökkentjük a hatszög területét. Az oldalak mentén 6 db félkörrel növeljük a területet. Így az a) ábrán látható síkidom területe:

$$t_a = t_h - 6t_k/3 + 6t_k/2 = t_h + t_k.$$

A b) ábra esetén a csúcsoknál 6 db kétharmad körrel növeljük a hatszög területét. Az oldalak mentén 6 db félkörrel csökkentjük a területet.

Így az b) ábrán látható síkidom területe: $t_b = t_h + 6 \cdot 2t_k/3 - 6t_k/2 = t_h + t_k$.

Tehát a két síkidom területe egyenlő.



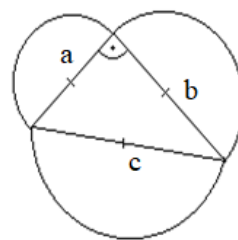
9. Jelöljük a derékszögű háromszög befogóit a -val és b -vel, az átfogót c -vel! Ekkor a befogókra rajzolt félkörök területének összege:

$$t = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} \right)^2 \pi + \frac{1}{2} \left(\frac{b}{2} \right)^2 \pi = \frac{a^2 + b^2}{8} \pi.$$

A derékszögű háromszögre érvényes Pitagorasz tétele: $a^2 + b^2 = c^2$. Így a két kisebb félkör területének összege:

$$t = \frac{a^2 + b^2}{8} \pi = \frac{c^2}{8} \pi = \frac{1}{2} \left(\frac{c}{2} \right)^2 \pi. \text{ Ez a legnagyobb félkör területe.}$$

Tehát a kérdésre igen a válasz.



10. A kérdésekre nem Igazmondó válaszolt, mert magára nem mondta volna, hogy Felemás. Ha Hazudós válaszolt, akkor a jobb oldali út is hamis. Ha Felemás válaszolt, akkor a második válasz igaz, ezért az első válasz hamis. Így a bal oldali út vezet Mekkába. [▶](#) [«](#)

1. Először 9 egyjegyű számot írunk le. Ezután 90 db kétjegyű számot, azaz 180 számjegyet. Ez összesen 189 db számjegy. Le kell még írunk $1994 - 189 = 1805$ számjegyet. (900 db háromjegyű szám van, amely 2700 számjegy.) Mivel $1805 = 3 \cdot 601 + 2$, így a 602. háromjegyű szám 2. számjegye lesz az 1994. leírt számjegy. A 602. háromjegyű szám a 701 ($= 99 + 602$), mert az 1. háromjegyű szám a 100 ($= 99 + 1$). Így az 1994. leírt számjegy a 0.

2. Legyen $a = 4321233$!

Ekkor $\frac{4321234 \cdot 8642467 - 4321233}{4321233 \cdot 8642467 + 4321234} = \frac{(a+1)(2a+1)-a}{a(2a+1)+(a+1)} = \frac{2a^2+2a+1}{2a^2+2a+1} = 1$. Tehát a tört értéke 1.

3. Jelöljük a kocka élét a -val ($a = 6$ cm)! Ekkor a kocka felszíne: $A = 6a^2 = 216$ cm². A kocka térfogata: $V = a^3 = 216$ cm³. A négyzet oldalai: $b = 2$ cm.

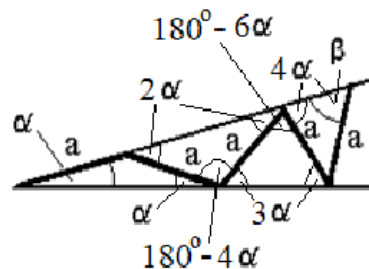
A kocka minden oldallapjának területéből hiányzik $b^2 = 4$ cm², összesen $6b^2 = 24$ cm². A furatok felszíne: $A_f = 6 \cdot 4b^2 = 96$ cm².

Tehát a lyukas test felszíne: $A_t = A - 6b^2 + A_f = (216 - 24 + 96)$ cm² = 288 cm².

Az eredeti kockából hiányzik 7 db b élű kocka.

Így a lyukas test térfogata: $V_t = V - 7b^3 = (216 - 7 \cdot 8)$ cm³ = 160 cm³.

4. Tudjuk, hogy a háromszög belső szögeinek összege 180° , és a háromszög külső szöge egyenlő a nem mellette fekvő két belső szög összegével. Továbbá az egyenlő szárú háromszög száraival szemben egyenlő szögek vannak. Ezek alapján meghatározhatjuk β -t. Az ábra segítségével az alábbi sorrendben juthatunk el a β szözig: α ; 2α ; $180^\circ - 4\alpha$; 3α ; $180^\circ - 6\alpha$; $4\alpha = \beta$.



a) Tehát $\beta = 4\alpha = 80^\circ$.

b) $\beta = 4\alpha < 90^\circ$, mert egy háromszögben legalább két hegyesszögnek kell lennie.

Tehát $\alpha < 90^\circ/4 = 22,5^\circ$.

5. Apa és fia páros számú halat fogott, azaz az összesen kifogott halak száma páros. A 21 nem páros szám. Ez az ellentmondás csak úgy oldható fel, ha nem négyen voltak, hanem csak hárman: Kálmán, a fia, Tamás, és Tamás fia, András (Kálmán András nagyapja).

6. a) Legyen az áru ára kezdetben x Ft! A csökkentés után $0.9x$ Ft. A második változás után $1,1 \cdot 0,9x$ Ft = $0,99x$ Ft. Ez az eredeti ár 99 %-a.

b) Legyen a fizetésem f Ft! A fizetésem 40 %-a adó. Így a 60 %-át ($0,6f$ Ft) kapom kézhez. Ha nem vonnának adót, akkor f Ft-ot kapnék. Ez $100f\% / (0,6f) = 166,67\%$ -a a kézhez kapott pénznek. Tehát $200\% / 3 \approx 66,67\%$ -al kapnék több pénzt.

7. Minden állatnak egy feje van. Tehát a parkban 50 állat van. Ha mindegyiknek két lába lenne, akkor 100 lábuk volna. A maradék 50 lábat kettesével 25 állatnak „oszthatjuk” ki. Így

25 állatnak van 4, és 25-nek 2 lába. Az utóbbiak a struccok. Ha a 25 négylábú állatnak csak egy-egy szarva lenne, akkor még $23 = 48 - 25$ szarvat ki kell osztani. Ennek a 23 állatnak lesz 2 szarva. Ezek az ökrök. 2 állatnak csak egy szarva van. Ezek az orrszarvúak. Tehát 2 orrszarvú, 23 ökör és 25 strucc van a vadasparkban.

Másik megoldási mód:

Jelölje az orrszarvúak, az ökrök és a struccok számát rendre x , y és z !

Ekkor (1) $x + y + z = 50$

(2) $x + 2y = 48$

(3) $4x + 4y + 2z = 150$ egyenletrendszer írhatjuk fel.

Ha az 1. egyenlet kétszeresét kivonjuk a 3. egyenletből, akkor $x + y = 25$ -öt kapunk. Ebből a 2. egyenlet felhasználásával $y = 23$ és $x = 2$ adódik. Az 1. egyenletet is felhasználva $z = 25$. Tehát 2 orrszarvú, 23 ökör és 25 strucc van a vadasparkban.

8. Jelölje az osztály által megtett utat km-ekben mérve x !

Ekkor a feladat feltételei szerint: $\frac{0,4x+50}{0,6x-50} = \frac{6}{5}$. Az egyenlet megoldása: $x = 343,75$. Tehát a teljes túra hossza 343,75 km.

9. Tegyük fel, hogy Bea első állítása igaz, a második hamis! Ekkor ellentmondásra jutunk, mert Dóra és Flóra is a 2. helyen végzett. Így Bea első állítása nem igaz. Induljunk el úgy, hogy Bea második állítása igaz! Ekkor nem jutunk ellentmondásra, és a sorrendet is megkapjuk: 1. Dóra; 2. Flóra; 3. Bea; 4. Edit; 5. Cili.

10. Jelölje a három prímszámot: p , q és r ! Ekkor a feltételek szerint: $5(p + q + r) = pqr$. Látható, hogy az egyenlet bal oldala osztható 5-tel, ezért a jobb oldal is osztható. Tehát az egyik prímszám az 5. Legyen ez az r .

Így $5(p + q + 5) = 5pq \rightarrow p + q + 5 = pq \rightarrow 5 = pq - p - q = (p - 1)(q - 1) - 1$.

Rendezés után: $6 = (p - 1)(q - 1)$. Két egész szám szorzata 6. A két szám 2 és 3 vagy 1 és 6 lehet. Az első esetben $p = 3$ -at és $q = 4$ -t kapunk. Ez nem megoldás (a 4 nem prímszám). A második esetben $p = 2$ és $q = 7$. Ez meg is felel: $5(2 + 7 + 5) = 2 \cdot 7 \cdot 5$.  

1. Vizsgáljuk először az egyenlőséget!

a) $x = -x$, ha $x = 0$,

$-x < x$, ha $0 < x$ és $x < -x$, ha $x < 0$.

b) $y = |y|$, ha $0 \leq y$,

$y < |y|$, ha $y < 0$.

c) $z^2 = z^3$, ha $z = 0$ vagy $z = 1$, $z^2 < z^3$, ha $1 < z$, és $z^2 > z^3$, ha $z < 0$ vagy $0 < z < 1$.

2. a) $\frac{x-2}{x-2} = 1$. Az egyenlet bal oldala is 1. Így azt kell vizsgálnunk, hogy az egyenletnek mely valós számokra van értelme. A tört nevezője nem lehet nulla. Tehát a 2 kivételével ($x \neq 2$) minden valós szám megfelel.

b) $(x-2)(x+3)(2x-7) = 0$. Egy szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla. Így $x = 2$, vagy $x = -3$, vagy $x = 3,5$.

c) $(x-3)^2 + (x+y+4)^2 = 0$. Egy szám négyzete nem lehet negatív. Két nemnegatív kifejezés összege csak akkor lehet nulla, ha mindkét kifejezés értéke nulla. Ez úgy teljesülhet, ha $x-3 = 0 \rightarrow x = 3$ és $x+y+4 = 0 \rightarrow y = -7$.

3. Jelölje az Aladár, Béla és Dezső által fogott halak számát rendre x , y és z !

Ekkor a feltételek szerint $x + y = z$, és közülük z a legnagyobb prímszám. Tehát z biztosan páratlan szám. Az $x + y$ összeg csak úgy lehet páratlan szám, ha az egyik páros, a másik páratlan. Egyetlen páros prímszám van, a 2. Mivel a 2 a legkisebb prímszám is, ezért 2 halat fogott, aki a legkevesebbet fogta.

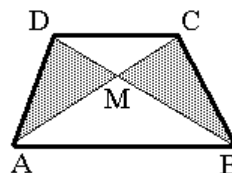
4. Jelölje a játzó embereket rendre X , Y és Z , a pénzüket forintban x , y és z !

Ekkor a 3. játszma után minhármuknak 400 Ft-ja van: $x_3 = y_3 = z_3 = 400$. A három embernek összesen $3 \cdot 400$ Ft = 1200 Ft-ja van. Legyen Z , aki utoljára veszített! Ekkor a 3. játszma után Z duplázta meg a többiek pénzét. Így nekik a 2. játszma után (a 3. játszma előtt) 200-200 Ft-juk volt: $x_2 = y_2 = 200$. Z -nek pedig: $z_2 = 800$.

Legyen most Y , aki a 2. játszmában veszített! Tehát X -nek és Z -nek duplázta meg a pénzét. Ekkor az 1. játszma után: $x_1 = 100$; $z_1 = 400$ és $y_1 = 700$.

Amikor X veszít, akkor Y -nak és Z -nek duplázta meg a pénzét: $y_0 = 350$; $z_0 = 200$ és $x_0 = 650$. Tehát 650, 350 és 200 Ft-tal kezdtek el játszani. Minden játszmában az veszített, akinek a legtöbb pénze volt.

5. Az ABC és $ABD\Delta$ -ek területe egyenlő, mert közös az AB alapjuk, és egyenlők a hozzá tartozó magasságuk. Az egyenlő területekből levonjuk az $ABM\Delta$ területét, akkor a maradékok is egyenlő területek lesznek. Ezzel bebizonyítottuk az állítást.



6. $4 : 7 = 0,57142857142857 \dots$. Látható, hogy a hányadosban az 571428 szakasz ismétlődik. Mivel $421 = 70 \cdot 6 + 1$, ezért a szakaszt 70-szer kell leírni, és a 71. szakaszból még az 5-öst. Tehát a keresett összeg: $70(5 + 7 + 1 + 4 + 2 + 8) + 5 = 1895$.

7. A kocka térfogata: $10^3 \text{ cm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$.

A legnagyobb furat térfogata: $6^2 \cdot 10 \text{ cm}^3 = 360 \text{ cm}^3$. A 4 cm-es furat térfogata mindkét oldalon azonos: $4^2 \cdot 2 \text{ cm}^3 = 32 \text{ cm}^3$, összesen 64 cm^3 . A 2 cm-es furat térfogata mindkét oldalon azonos: $2^2 \cdot 2 \text{ cm}^3 = 8 \text{ cm}^3$, összesen 16 cm^3 .

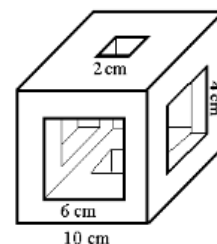
A lyukas test térfogata: $(1000 - 360 - 64 - 16) \text{ cm}^3 = 560 \text{ cm}^3$.

A test külső felszíne: $6 \cdot 10^2 - 2 \cdot 6^2 - 2 \cdot 4^2 - 2 \cdot 2^2 = 488 \text{ cm}^2$.

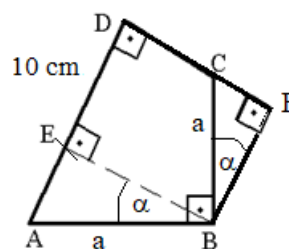
A falak vastagságából származó területek: $4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 96 \text{ cm}^2$.

A test belső felszíne a legnagyobb furat mentén számolva: $(60 - 16) \cdot 2 + (60 - 4) \cdot 2 = 200 \text{ cm}^2$.

A lyukas test felszíne: $488 + 96 + 200 = 784 \text{ cm}^2$.



8. A BCDE derékszögű trapézt egészítsük ki a BFCΔ-gel BFDE téglalappá! A $BFC\Delta \cong BEA\Delta$ -gel, mert $AB = BC$, és két szögük megegyezik (a derékszög és α (merőleges szárú szögek)). Tehát a két háromszög területe egyenlő. A BFDE téglalap valójában négyzet, mert $10 \text{ cm} = DE = BF = BE$. Így az ABCD négyszög területe egyenlő a BFDE négyzet területével, amely $10^2 \text{ cm}^2 = 100 \text{ cm}^2$.  



1. Több megoldás is van. Egy lehetséges megoldás:

$$\begin{array}{llll}
 0 = (9-9)1^5; & 1 = 1^5 + 9 - 9; & 2 = 1 + (9/9)^5; & 3 = 5 - 1 - 9/9; \\
 4 = 5 - 1 + 9 - 9; & 5 = 5 + 1 - 9/9; & 6 = 5^1 + 9/9; & 7 = 1 + 5 + 9/9; \\
 8 = 5^1 + 9/\sqrt{9}; & 9 = 1 + 5 + 9/\sqrt{9}; & 10 = 9 + 5 - 1 - \sqrt{9}; & 11 = 5 + 9 - 1\sqrt{9}; \\
 12 = 1 + 5 + 9 - \sqrt{9}; & 13 = 9 + 9 - 5^1; & 14 = 9 + 9 + 1 - 5; & 15 = 5 + 9 + 1^9; \\
 16 = 5 + 9 - 1 + \sqrt{9}; & 17 = 9 + 9 - 1^5; & 18 = \sqrt{9 \cdot 9} \cdot \sqrt{5 - 1}; & 19 = 9 + 9 + 1^5.
 \end{array}$$

2. $126 = 7 + 119 = 59 + 67$. A legnagyobb különbség: $119 - 7 = 112$, a legkisebb: $67 - 59 = 8$.

3. Jelölje x az érettségizők számát! Ekkor a felvételizők száma $0,9444x$. A felvételizők $100 - 80,4 = 19,6\%$ -át nem vették fel. Így $20 = 0,9444x \cdot 0,196$. Ebből $x = 108$.

Tehát 108 tanuló érettségizett a Verseggy Ferenc Gimnáziumban 1995-ben.

4. Ha az első napon x km-t gyalogoltunk, akkor a második napon $2x$ km-t. Jelöljük y -nal a harmadik napon megtett utat kilométerekben mérve! Ekkor $2y/3 = 2x$. Tehát $y = 3x$. A feladat szerint: $x + 2x + 3x = 6x = 66$. Ebből $x = 11$. A harmadik napon 33 km-t tettünk meg.

5. Jelölje n a katonák számát! Ekkor a feltételek szerint $n - 1$ osztható 2, 3, 4, 5 és 6-tal. Tehát $n - 1$ a 2; 3; 4; 5 és 6 számok olyan közös többszöröse, amely kisebb 200-nál. A legkisebb ilyen szám a 2; 3; 4; 5 és 6 legkisebb közös többszöröse, a 60. Így n lehetséges értékei: 61; 121 és 181.

A 61 és a 181 nem felelnek meg, mert prímszámok, és nem állíthatók a katonák a feltételeknek megfelelően sorba. A $121 = 11^2$, így 11 db 11-es sorba állíthatjuk a katonákat. Tehát az őrmester 11 katonát állított egy sorba.

6. Használjuk az ábra jelöléseit!

$m_1 = 0,5 \cdot m$, mert $AC'F\Delta \sim ATC\Delta$, és a hasonlóság aránya 0,5.

M az $ABCD$ súlypontja, amely harmadolja a súlyvonalakat.

Továbbá $C'BFA \sim C''BMA$, és a hasonlóság aránya $\frac{2}{3}$.

Így $m_2 = \frac{2}{3} \cdot m_1 = \frac{1}{3} \cdot m$. Az $ABCD$ területe: $1 \text{ m}^2 = 0,5 \cdot AB \cdot m$. A $GHMA$ területe:

$$0,5 \cdot \frac{1}{3} \cdot AB \cdot \frac{1}{3} \cdot m = \frac{1}{9} \text{ m}^2.$$

7. Használjuk az ábra jelöléseit!

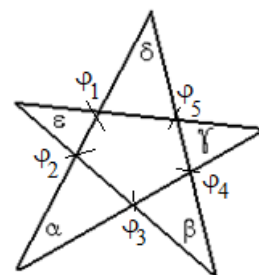
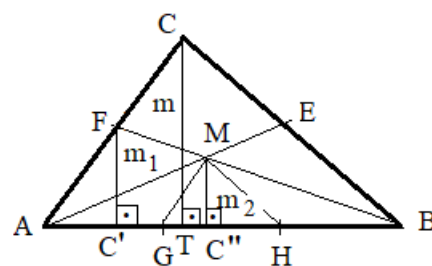
$$\alpha + \gamma + \varphi_1 = 180^\circ;$$

$$\beta + \delta + \varphi_2 = 180^\circ;$$

$$\gamma + \varepsilon + \varphi_3 = 180^\circ;$$

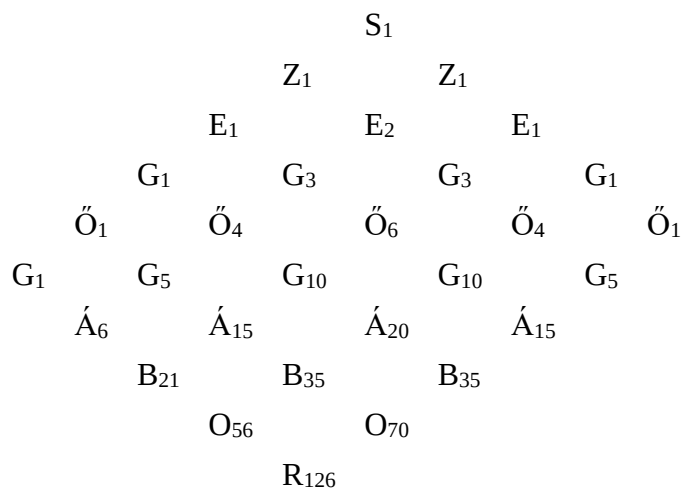
$$\alpha + \delta + \varphi_4 = 180^\circ;$$

$$\beta + \varepsilon + \varphi_5 = 180^\circ.$$



Adjuk össze az egyenleteket: $2(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon) + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 = 5 \cdot 180^\circ$! A φ -vel jelölt 5 szög összege 540° , mert egy ötszög belső szögei. Ebből $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 180^\circ$.

8. Minden betűhöz odaírtuk, hogy az S betűből indulva hányféle úton juthatunk oda. Minden szám a közvetlenül felette levő 1 szám, vagy a felette levő 2 szám összegével egyenlő. Az R betű mellett 126 szerepel. Így 126-féleképpen olvashatjuk ki SZEGŐ GÁBOR nevét. [▶](#) [»](#)



1. 1 óra alatt Leó $\frac{1}{3}$ -részét enne meg az antilopnak, a párja $\frac{1}{4}$ -ét, a kölykök $3 \cdot \frac{1}{10}$ -részét. Az egészet x óra alatt ennék meg: $(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{3}{10}) = 1$. Ebből $x = \frac{60}{53}$ óra ≈ 1 óra 8 perc.

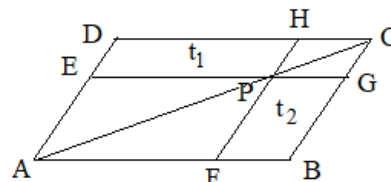
2. Az első jegy csak 1-es lehet. A negyedik jegy 5. A két középső összege $23 - 6 = 17$. Ez csak a 8 és 9 számjegyek összegeként állítható elő. Így a keresett szám 1895 vagy 1985.

3. A paralelogrammát az átlója két egybevágó háromszögre bontja. Ezek területe egyenlő. Használjuk az ábra jelöléseit!

$$t_{CDA} = t_{ABC};$$

$$t_{PEA} = t_{AFP} \text{ és}$$

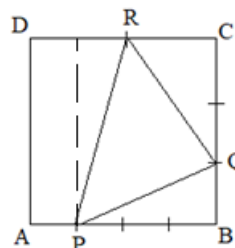
$$t_{CHP} = t_{PGH}.$$



Az első egyenlőségből vonjuk ki a másik kettő összegét! Ekkor a bal oldalon t_1 -t, a jobb oldalon t_2 -t kapunk: $t_1 = t_{CDA} - t_{PEA} - t_{CHP} = t_{ABC} - t_{AFP} - t_{PGH} = t_2$.

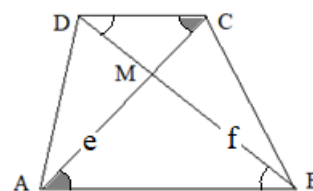
4. Az ABCD négyzet oldalai egységnyi hosszúságúak. A PBQΔ befogói $\frac{3}{4}$ és $\frac{1}{3}$ hosszúságúak. Így a területe: $t_{PBQ} = \frac{1}{8}$ területegység. Hasonlóan

$t_{CRQ} = \frac{1}{6}$ és $t_{APRD} = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{4} + \frac{1}{2}) = \frac{3}{8}$ területegység (a trapéz területképlete alapján; vagy egy téglalapra és egy derékszögű háromszögre bontjuk az APRD trapézt).



Tehát a PQRΔ területe: $t_{PQR} = 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{6} - \frac{3}{8} = \frac{1}{3}$ területegység.

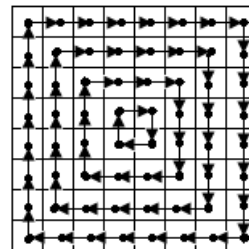
5. Használjuk az ábra jelöléseit! Ekkor $AB = 10$ cm; $CD = 5$ cm; $e = 9$ cm; $f = 12$ cm. Az $ABM\Delta \sim CDM\Delta$ -höz, mert szögeik egyenlők. A hasonlóság aránya $AB : CD = 2$. Ezért $AM = 6$ cm; $MC = 3$ cm ($6 + 3 = 9$ és $6 : 3 = 2$). Hasonlóan $BM = 8$ cm; $MD = 4$ cm. A Pitagorasz-tétel megfordításából következik, hogy az $ABM\Delta$ derékszögű ($6^2 + 8^2 = 10^2$). Az M pont tehát négy derékszögű háromszög derékszögű csúcsa. Ezek területe könnyen kiszámolható. Így a trapéz területe: $0,5 \cdot e \cdot f = 54$ cm².



6. Egy egész szám végén álló 0-k száma meghatározza, hogy a szám 10-nek hányadik hatványával osztható. (Pl. ha 5 db 0-ra végződik, akkor osztható 10^5 -nel.) $10 = 2 \cdot 5$ (2 és 5 prímszámok). 1-től 101-ig a számok prímtényezős felbontásában minden második szám tartalmazza a 2-es prímtényezőt. 5-ös kevesebb van, csak minden 5. számban fordul elő. Tehát 20 db ilyen szám van. Minden 25. számban van még egy 5-ös tényező. Ezek száma 4 (3 db 5-ös tényező a 125-ben lenne). Ez összesen 24 db 5-ös tényező. Tehát a szorzat 24 db 0-ra végződik.

7. $1995^{1996} = (3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19)^{1996} = 3^{1996} \cdot 5^{1996} \cdot 7^{1996} \cdot 19^{1996}$. A legnagyobb kétjegyű osztó: $5 \cdot 19 = 95$.
A legnagyobb háromjegyű osztó: $3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 945$.

8. 8×8 -as sakktábla esetén könnyen megvalósítható olyan „séta”, amely a feladat feltételeinek megfelel. A külső mezőkön álló bogarak körbe haladva menjenek át a szomszédos mezőre a mellékelt ábrán a nyilaknak megfelelően! Folytassuk az eljárást a következő belső „körrel”!



5×5 -ös sakktábla esetén 12 fehér és 13 fekete mező van (vagy fordítva). A fekete mezőn lévő katicabogarak fehér mezőre mennek. Így lesz olyan fehér mező, amelyiken legalább 2 bogár lesz. Tehát 5×5 -ös sakktábla esetén nem valósítható meg, hogy a „séta” után minden mezőn egy katicabogár legyen. ◀ ◀

1. A ló 1 hónap alatt $\frac{1}{2}$ kocsi szénát eszik meg, a kecske $\frac{1}{3}$, a nyúl $\frac{1}{6}$ kocsival. A 3 állat együtt 1 hónap alatt $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ kocsi szénát eszik meg. Így a két kocsi szénát 2 hónap alatt eszik meg.

2. $45 = 9 \cdot 5$ (9 és 5 relatív príme). 5-tel akkor osztható egy szám, ha 0-ra vagy 5-re végződik. A 9-cel való oszthatóság szabálya alapján $1 + 1 + y + 5 + 3 + 8 + x = x + y + 18$ osztható 9-cel. Foglalkozzunk táblázatba a lehetséges eseteket!

x	0	5
y	0 vagy 9	4

3. $1 : 7 = 0,142857142857\dots$ és az utolsó hat jegy ismétlődik. Mivel $1996 = 6 \cdot 332 + 4$, így az ismétlődő szakasz negyedik eleme lesz a keresett számjegy. Ez a 8-as.

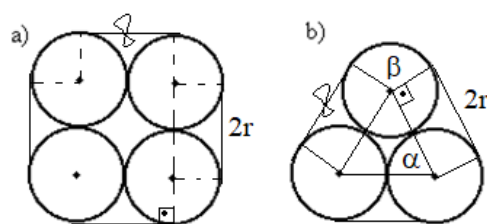
4. Legyen az ötjegyű szám x ! Ha az elejére írunk 1-et, akkor $100\,000 + x$ -et kapunk. Ha a végére, akkor $10x + 1$ -et. A feleltételek szerint: $10x + 1 = 3(100\,000 + x)$. Ebből ($7x = 299\,999$) $x = 42857$.

5. Használjuk az ábra jelöléseit! Ekkor $r = 10$ cm. Az

a) esetben a zsinag hossza $4 \cdot 2r$, 4 negyedkör területének és 25 cm-nek az összege: $8 \cdot 10 + 20\pi + 25 = 105 + 20\pi \approx 167,83$ cm.

A b) esetben $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$. A zsinag hossza $3 \cdot 2r$,

3 harmadkör területének és 25 cm-nek az összege: $6 \cdot 10 + 20\pi + 25 = 105 + 20\pi \approx 147,83$ cm.



6. a) $4(F) + 5(Z) + 1(P) = 10$ golyót;

3P; 4F; 5Z

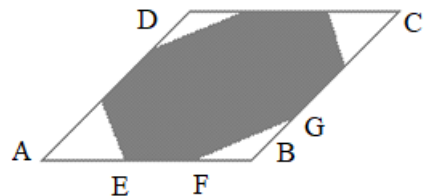
b) $3(P) + 4(F) + 2(Z) = 9$ golyót;

c) $5(Z) + 4(F) + 1(P) = 10$ golyót;

d) $4(F) + 1$ golyót kell legalább kivenni.

7. Használjuk az ábra jelöléseit! Az $ABCA$ területe fele a rombusz területének. Az $FBGA \sim ABCA$ -höz. A hasonlóság aránya $1 : 3$. Így területe kilencede az $ABCA$ területének, amely a rombusz területének egy tizenennyolcad része. Ez igaz a többi „levágott” háromszögre is. Tehát a

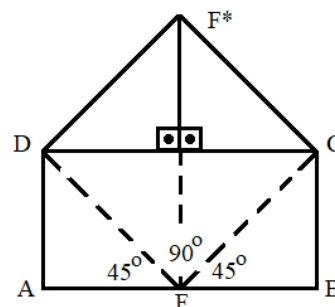
nyolcszög területe $\frac{14}{18} = \frac{7}{9}$ része a rombusz területének.  



1. Az A összeg esetén 500 páratlan számot kell a párosakhoz hozzáadni. Így az összeg is páros. A B-ben 998 páratlan számot adunk párosakhoz. Így az összeg itt is páros.

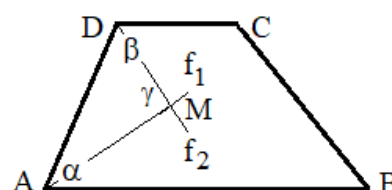
2. Miután felébredt az utas, az út felének az $\frac{1}{4}$ -e volt még hátra. Így az út felének a $\frac{3}{4}$ részét aludta át. Ez az egész út $\frac{3}{8}$ része.

3. A lovak száma legyen x , a disznóké y ! Ekkor a tehenek száma $3x$, a bárányoké $2y$. A feltételek szerint: $4x + 3y = 25$. A lovak száma (x) nem lehet 1, mert vannak különböző színű lovak. y -ra nem kapunk egész számot, ha $x = 2; 3; 5$ vagy 6 . $x = 4$ esetén $y = 3$. Tehát 4 ló, 12 tehén, 3 disznó és 6 bárány legel az úton ($4 + 12 + 3 + 6 = 25$).



4. Az ABCD téglalapból a szaggatott vonalak mentén levágunk két háromszöget. Ezek egyenlő szárú derékszögű háromszögek. Helyezzük ezeket az ábra szerint a téglalap „tetejére”! A DFCF* négyszög négyzet.

5. Használjuk az ábra jelöléseit! Tanultuk, hogy a trapéz egy szárán lévő szögek összege $\alpha + \beta = 180^\circ$. Így, az AMD Δ -ben $\gamma = 180^\circ - 0,5\alpha - 0,5\beta = 180^\circ - 0,5(\alpha + \beta) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Az f_1 és f_2 szögfelezők szöge 90° .

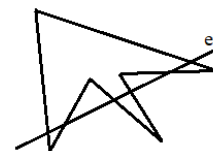


6. Az ábra egy lehetséges megoldást szemléltet.

7. Meg kell nézni az A jelű kártya másik oldalát. Ha páratlan



számot látunk, akkor az állítás hamis. Ha páros számot, akkor még a 9-es másik oldalát is meg kell nézni. Tehát a kérdés eldöntéséhez legalább egy, legfeljebb két kártyát kell megfordítani.



8. Jelöljük rendre 1-gyel, ha az adott színből páratlan számú van, és 0-val, ha páros! Ekkor (paritás szempontjából) az alábbi 8 eset lehet: 000; 001; 010; 100; 011; 101; 110 és 111. Ha van 9 dobozunk, akkor már a paritás szempontjából biztosan van két egyforma doboz. Ezt a kettőt összeöntve minden színből páros sok golyó lesz. ◀ ◀

1. 24 tanuló esetén lehet, hogy minden hónapban 2 - 2 születésnap van. 25 tanuló esetén már biztosan lesz egy hónapban 3 születésnap.

$7 \cdot 14 = 98$ tanuló esetén előfordulhat, hogy a hét egy napjára nem esik születésnap. 99 tanuló esetén már biztosan van 15 olyan tanuló, aki a hétnek ugyanazon a napján született. Így a tanulók száma legfeljebb 98 ($n \leq 98$).

2. Egy dominó egy fehér és egy fekete mezőt takar le. 31 dominó 31 fehér és 31 fekete mezőt takar le. Így egy fehér és egy fekete mező marad takaratlanul. Az (a8) és a (h1) mező azonos színű. Tehát nem lehet a feltételeknek megfelelő módon letakarni a sakktáblát dominókkal.

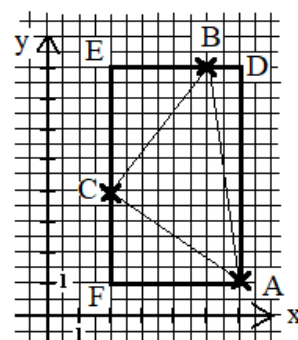
3. A feltételek szerint 3 tömbből lesz 3 alkatrész és egy újabb tömb ($3t = 3a + t$). Valójában 2 tömbből lehet 3 alkatrészt gyártani. Tehát az 1 tömbben lévő ólom 1,5 alkatrészhöz szükséges ólomot tartalmaz. Így 29 tömb $29 \cdot 1,5 = 43,5$ alkatrész gyártásához szükséges ólomot tartalmaz. Tehát összesen 43 alkatrész gyártható a 29 ólomtömbből.

4. Jelölje a keresett számot x ! Ekkor $x - 6$ osztható lesz $x - 1598$ -cal. Tehát a feltételek szerint $x - 6 = 5(x - 1598)$. Ebből $x = 1996$. ($1996 = 5 \cdot (1996 - 1598) + 6$) Ez megfelel a feladat feltételeinek. Tehát a keresett szám az 1996.

5. Az $ABC\Delta$ -et befoglaljuk az $ADEF$ téglalapba. Ennek a területéből kell levonni a rajzon látható derékszögű háromszögek területét.

Az oldalak hossza az ábráról leolvasható.

$$t_{ABC} = 4 \cdot 7 - \frac{1}{2}(4 \cdot 3 + 1 \cdot 7 + 3 \cdot 4) = 12,5 \text{ területegység.}$$



6. Három és fél óra alatt $3,5 \cdot 4 = 14$ percet késett az órák. A késés következtében az órák mutatója 60 perc helyett csak 56 perccel megy előre. A 14 az 56-nak a negyede, így $60 : 4 = 15$ perc múlva fog az órák pontosan 12 órát mutatni. Ekkor valójában 12 óra 15 perc lesz a tényleges idő.

7. Az egyenes pontjai a sokszöggel alkotott 1. metszésponttól a 2. metszéspontig a sokszög belsejébe esnek. A 3. metszésponttól a 4. metszéspontig újra a sokszög belsejében lesznek. Folytatva és összegezve a gondolatmenetet: minden páratlan sorszámú metszésponttól a következőig az egyenes belsejében lesznek az egyenes pontjai. Így a 1997. oldallal való metszéspont után is belül vannak az egyenes pontjai, és belül is maradnak, mert nincs 1998. oldal. Ez azonban nem lehetséges, mert az egyenes végtelen hosszú, a sokszög pedig csak egy véges síkrészt foglal el.

8. Vonjuk ki a páros számokból az előtte levő páratlan számot! Így 998 darab 1-est kapunk. Ezeknek kettesével véve a különbségét 499 darab 0 lesz a táblán. Tehát el lehet érni, hogy a végén csak 0 legyen a táblán. ◀ ◀

1. Az $a3b$ háromjegyű szám csak 1-essel kezdődhet ($a = 1$), mert a 7-szerese háromjegyű szám (db4). Továbbá az utolsó számjegye 2 ($b = 2$), mert a 7-szerese 4-re végződik. Az eredmény utolsó számjegye mutatja, hogy $f = 0$. Ezért $c = 5$, mert f a $c \cdot b$ szorzat utolsó számjegye. $132 \cdot 75 = 9900$ a szorzás eredménye. Ez megfelel a feltételeknek. A feladat nem tiltotta meg, hogy különböző betűk azonos számot jelöljenek ($f = 0 = g$).

2. $15 = 3 \cdot 5$, és 3 és 5 prímszámok. Ezért a számnak 3-mal és 5-tel kell oszthatónak lennie. Az 5-tel való oszthatóság miatt y 0 és 5 lehet. Ha $y = 0$, akkor a számjegyek összege: $7 + x + 1 + 8 + 0 = x + 16$. Ennek oszthatónak kell lennie 3-mal. Ebből $x = 2$; 5 és 8.

Ha $y = 5$, akkor a számjegyek összege: $7 + x + 1 + 8 + 5 = x + 21$. Ebből $x = 0$; 3; 6 és 9.

Összefoglalva:	x	2; 5; 8	0; 3; 6; 9
	y	0	5

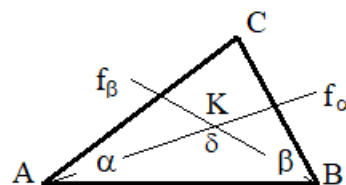
3. Jelölje x a 3 éves korom óta eltelt időt! Ekkor én most $3 + x$, édesapám $31 + x$ éves. A feladat feltételei szerint: $3(3 + x) = 31 + x$. Ebből $x = 11$. Édesapám $31 + x = 42 (= 3 \cdot 14)$, én $3 + x = 14$ éves vagyok most. Ez megfelel a feladat feltételeinek. Tehát 14 éves vagyok.

4. Használjuk az ábra jelöléseit!

Az $ABK\Delta$ szögei $0,5\alpha$; $0,5\beta$ és δ . A háromszögek belső szögeiről tanultak alapján $\delta = 180^\circ - 0,5(\alpha + \beta)$.

Az $\alpha + \beta < 180^\circ$, ezért $0,5(\alpha + \beta) < 90^\circ$.

Így $\delta = 180^\circ - 0,5(\alpha + \beta) > 90^\circ$. Tehát az $ABK\Delta$ K csúcsánál mindig tompaszög van.



5. 1-től 10-ig adjuk össze a számok köbének utolsó számjegyét!

$1 + 8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9 + 0 = 45$. Ez 5-re végződik. Hasonlóan 5-re végződik 11-től 20-ig, 21-től 30-ig, ..., 81-től 90-ig az utolsó számjegyek összege. Ez 9 darab 5-re végződő szám. Összegük is 5-re végződik. $91^3 + 92^3$ utolsó számjegyei 1 és 8. A keresett számjegyek tehát $5 + 1 + 8 = 14$ utolsó számjegye, azaz 4.

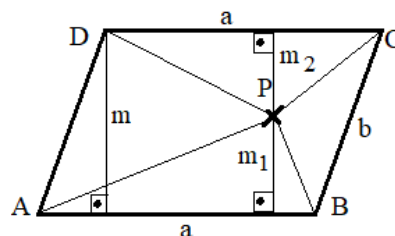
6. Használjuk az ábra jelöléseit!

A paralelogramma területe: $t = a \cdot m$.

A két háromszög területének összege:

$$t_{2\Delta} = 0,5 \cdot (a \cdot m_1 + a \cdot m_2) = 0,5 \cdot a \cdot (m_1 + m_2) = 0,5 \cdot a \cdot m.$$

Ez a paralelogramma területének a fele.



7. Jelölje a játzó embereket rendre X, Y és Z, a pénzüket forintban x, y és z!

Ekkor a 3. játszma után minhármuknak 16 Ft-ja van: $x_3 = y_3 = z_3 = 16$. A három embernek összesen $3 \cdot 16 \text{ Ft} = 48 \text{ Ft}$ -ja van. Legyen Z, aki utoljára veszített! Ekkor a 3. játszma után Z duplázta meg a többiek pénzét. Így nekik a 2. játszma után (a 3. játszma előtt) 8-8 Ft-juk volt: $x_2 = y_2 = 8$, Z-nek pedig $z_2 = 32$.

Legyen most Y, aki a 2. játszmában veszített! Tehát X-nek és Z-nek duplázta meg a pénzét. Ekkor az 1. játszma után: $x_1 = 4$; $z_1 = 16$ és $y_1 = 28$.

Amikor X veszít, akkor Y-nak és Z-nek duplázta meg a pénzét: $y_0 = 14$; $z_0 = 8$ és $x_0 = 26$.

Tehát 26, 14 és 8 Ft-tal kezdtek el játszani. Minden játszmában az veszített, akinek a legtöbb pénze volt.

8. Mindkét esetben két esetet kell vizsgálni.

a) Használjuk az ábrát!

Jelöljük az eltelt időt t -vel!

Ekkor az 1. esetben a $42 - 10t = 18t$ egyenletet írhatjuk fel. Ebből $t_1 = 1,5$ óra.

A 2. esetben a $42 + 10t = 18t$ egyenlet írható fel. Ebből $t_2 = 5,25$ óra.

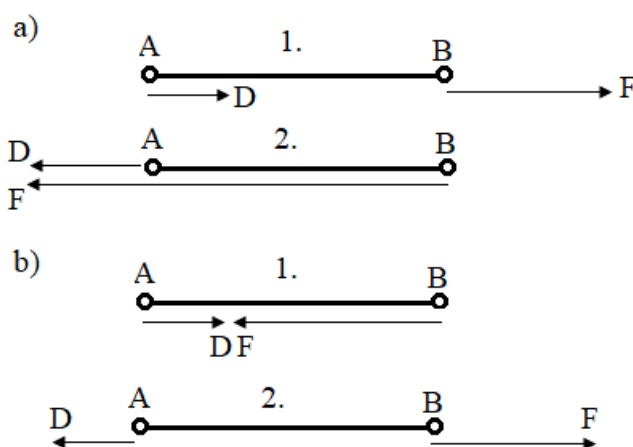
b) Az 1. esetben: $10t + 18t = 42$.

Ebből $t_3 = 1,5$ óra.

A 2. esetben: $10t + 42 = 18t$.

Ebből $t_4 = 5,25$ óra.

Tehát 1,5 illetve 5,25 óra múlva lehetnek azonos távolságra B várostól. ◀ ◀



1. A csordában 32 tevé van, mert minden tevének pontosan 1 feje van. Mivel a tevék legalább egypúpúak, a 32 tevének legalább 32 púpjá van. A maradék 17 púp 17 tevéhez tartozik, mert a tevék legfeljebb kétpúpúak. Így 15 egypúpú tevé van a csordában.

2. Jelöljük a kis madarak árát x -szel! Így a nagy madarak ára $2x$. $5 \cdot 2x + 3 \cdot x > 3 \cdot 2x + 5 \cdot x$.

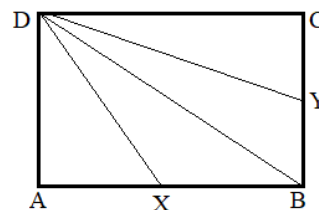
Az $5 \cdot 2x + 3 \cdot x = 3 \cdot 2x + 5 \cdot x + 20$ egyenlet alapján $x = 10$, amely megoldása a feladatnak.

A nagy madár ára 20 dollár, a kicsié pedig 10 dollár.

3645000				
270		1350		
6		45	300	
2	3	15	20	
2	1	3	5	4

3. A 4-es számot számoltam ki utoljára.

4. Az DB átló a téglalapot két egyenlő területű részre bontja, mert két egybevágó háromszög keletkezik (a két háromszögben a megfelelő oldalak egyenlők). Így már csak a háromszögek területét kell megfeleltetni. Az AXD és az XBD háromszögek magasságai egyenlők ($m = AD$). A két háromszög területe csak akkor egyezik meg, ha alapjaik is egyenlők. Tehát X az AB szakasz, Y pedig a BC felezőpontja.



Hasonló gondolatmenet alapján a hat részre osztásnál a harmadolópontokat kell felhasználni.

5. Egy szám akkor osztható 36-tal, ha 4-gyel és 9-cel is osztható. A 4-gyel való oszthatóságból következik, hogy y 2 vagy 6 lehet. A 9-cel való oszthatóságból pedig $y = 2$ esetén $x = 8$, illetve $y = 6$ esetén $x = 4$ következik.

6. $4382 = 12 \cdot 365 + 2$. A két évszám között 12 a különbség, és közben 2 szökőév volt. 12 év alatt azonban 3 szökőévnek kellene lennie. Ez csak úgy lehetséges, hogy 1800 az említett évek között van. Így az első győzelem évszáma legalább 1788, és legfeljebb 1800 lehet. Ezen évszámok közül csak az 1796 számjegyeinek az összege lesz 23. A két keresett évszám: 1796 és 1808.

7. A négyzetek sarkaiba írjuk azt a számot, ahány módon eljuthatunk abba a pontba! Ez a közvetlenül balra mellette, és a közvetlenül alatta lévő két szám összege. Vannak olyan csúcsok, ahová a feltételek értelmében nem mehetünk, mert csak szabálytalanul érhetjük el vagy hagyhatjuk el. Ilyen pontokhoz nullát írunk. Tehát 14 lehetséges út tesz

	4	7	7	9	B
1	3	3	0	2	14
1					5
1	2	0	1	2	3
0	A	1	1	1	1

eleget a feltételeknek. Minden út azonos hosszúságú, mert minden esetben 3-szor lehet felfelé és 5-ször jobbra menni. Így minden út hossza a négyzet oldalának 8-szorosa.

8. Ha a keresett számhoz hozzáadunk 1-et, akkor osztható lesz 2-vel, 3-mal, ... és 10-zel is. Így ez a szám a 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 és 10 közös többszöröse közül kerül ki. A fenti számok legkisebb közös többszöröse $8 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$. A további többszörösök nem felelnek meg, mert a narancsok száma meghaladná az 5000-et. Így a narancsok száma 2519. ◀ ◀

$$1. 5^{600} = (5^2)^{300} = 25^{300} \qquad 3^{900} = (3^3)^{300} = 27^{300}$$

Mivel $25 < 27$, a kitevő azonos, így $5^{600} < 3^{900}$.

$$\begin{aligned} 2. x^2 + 32547817x - 11 &= x(x + 32547817) - 11 = \\ &= 67452183(67452183 + 32547817) - 11 = \\ &= 67452183 \cdot 100\,000\,000 - 11 = \\ &= 6745218300000000 - 11 = 6745218299999989. \end{aligned}$$

3. A doboz magassága minden oldalánál azonos, ezért a kartonpapír sarkaiból egy-egy négyzetet kell kivágni. Ez a 4 négyzet egybevágó. $42\text{ cm} \cdot 38\text{ cm} = 1596\text{ cm}^2$.

Mivel $1596\text{ cm}^2 - 1532\text{ cm}^2 = 64\text{ cm}^2 = 4 \cdot (4\text{ cm})^2$, így a kivágott négyzetek oldalai 4 cm hosszúak. A doboz magassága tehát 4 cm.

A doboz alapja pedig $34\text{ cm} \cdot 30\text{ cm} = 1020\text{ cm}^2$. A térfogata: 4080 cm^3 .

4. Az első nap nappal a baktériumtörzs 2^{13} -szorosára nő, éjjel pedig 2^{11} -ed részére csökken.

Tehát az első nap a 4-szeresére fog nőni.

Ez a mennyiség a második nap újra a 4-szeresére fog nőni, és ez folytatódik a további napokon is. A 7. nap végére $4^7 = 16384$ -szeresére nő.

5. Haladjon a síelő az első esetben x órán át! Ekkor a második esetben $x - 2$ órán át haladt.

Mindkét esetben azonos hosszúságú utat tett meg: a $10x = 15(x - 2)$ egyenletből $x = 6$ óra.

A síelő $10\text{ km/h} \cdot 6\text{ h} = 60\text{ km}$ -t tett meg. Ha délben szeretne megérkezni, akkor 5 órán át kell haladnia. Ehhez pedig 12 km/h sebesség szükséges.

6. Használjuk az ábra jelöléseit!

A háromszög hegyesszögei: $\alpha = x$ és $\beta = 5x$.

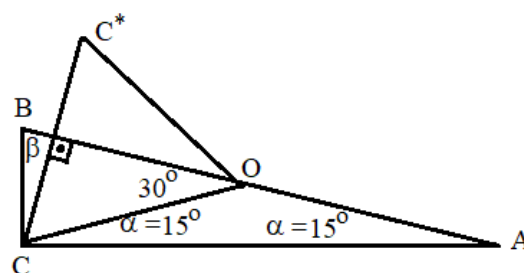
$\alpha + \beta = 6x = 90^\circ$, melyből $x = 15^\circ$.

Így $\alpha = 15^\circ$.

A derékszögű háromszög köré írható kör

O középpontja az átfogó felezőpontja. C^* a

C pont AB egyenesre vonatkozó tükörképe.



Az ábra alapján az OCC^* háromszög szabályos. A kör sugara így 2 egység. Az ABC háromszög átfogója pedig 4 egység.

7. A utolsó kő tömege: $370 \text{ kg} + 49 \cdot 2 \text{ kg} = 468 \text{ kg}$.

A kövek össztömege: $25 \cdot (370 + 468) \text{ kg} = 20\,950 \text{ kg}$.

A 7 teherautó képes ennyi tömeget elszállítani ($7 \cdot 3\,000 = 21\,000$).

$7 \cdot 7 = 49$, így egy teherautóra biztosan 8 követ kell tenni.

A 8. kő tömege: $370 \text{ kg} + 7 \cdot 2 \text{ kg} = 384 \text{ kg}$.

Az első 8 kő tömege: $4 \cdot (370 + 384) = 3016 \text{ kg}$.

Mivel a 8 legkönnyebb kő tömege is több mint 3000 kg, így nem szállítható el.

8. 1-től 1997-ig 9 db egyjegyű: 9 számjegy, 90 db kétjegyű: 180 számjegy, 900 db háromjegyű: 2700 számjegy, és 998 db négyjegyű: 3992 számjegy van.

Összesen: 6881 számjegy.

Tehát 1997-nek a 7-e a 6881. számjegy.

$2000 - (9 + 180) = 1811 = 603 \cdot 3 + 2$.

A 2000. leírt számjegy a 604. háromjegyű szám 2. számjegye: a 703 második számjegye.

A keresett számjegy a nulla.  

1. $30 = 6 \cdot 5$, és 6 és 5 relatív prímek. Ezért a számnak 6-tal és 5-tel kell oszthatónak lennie. Az 5-tel való oszthatóság miatt Y csak 0 lehet, mert csak páros lehet (6-tal is osztható). Ha $Y = 0$, akkor a számjegyek összege $1 + X + 5 + 9 + 0 = X + 15$. Ennek oszthatónak kell lennie 3-mal. Ebből $x = 0; 3; 6$ és 9 .

Ha $y = 5$, akkor a számjegyek összege: $1 + x + 1 + 8 + 5 = x + 21$. Ebből $X = 0; 3; 6$ és 9 .

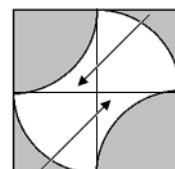
Összefoglalva:	X	0; 3; 6; 9
	Y	0

2. a) Minden oldallap közepén lévő 3×3 -as négyzet kockáinak lesz egy oldala festett. Ez oldalanként 9 kocka. Így összesen $6 \cdot 9 = 54$ olyan kis kocka van, amelynek pontosan egy oldala festett.

b) Azok a kockák nincsenek festve, amelyek az eredeti kocka belsejében vannak.

Ez $3 \times 3 \times 3$ kis kocka. Ez összesen $3^3 = 27$ kis kocka.

3. Ha az ábra szerint átdaraboljuk a négyzetet, akkor láthatóvá válik, hogy a besatírozott rész területe fele a négyzet területének.



4. Foglaljuk táblázatba az adatokat!

	most	25 évvel ezelőtt
apa (életkor)	x	$x - 25$
fiú (életkor)	$x - 30$	$x - 55$

A feltételek szerint: $x - 25 = 3(x - 55)$. Ebből $x = 70$.

Tehát az apa 70 éves, a fia pedig 40 éves.

5. Tekintsük a számokat 0-tól 1999-ig négyjegyű számoknak a táblázatban látható módon!

0	0	0	0	Ekkor az első ezer szám (0 – 999) 0-s számjeggyel kezdődik.
0	0	0	1	Számoljuk össze, hogy 999-ig hány 1-es számjegy szerepel!
⋮				1 db 1-es $3 \cdot 9 \cdot 9 = 243$ esetben fordul elő. Ez 243 db 1-es számjegyet jelent.
0	9	9	9	2 db 1-es $3 \cdot 9 = 27$ esetben fordul elő. Ez 54 db 1-es számjegyet jelent.
1	0	0	0	3 db 1-es 1 esetben fordul elő. Ez 3 db 1-es számjegyet jelent.
⋮				Összesen $243 + 54 + 3 = 300$ db 1-es számjegy.
1	9	9	7	Az 1000-tól 1999-ig terjedő számokban 1000-szer fordul elő az 1-es az első helyen. A további helyeken ismét 300-szor fordul elő. A feltételek szerint csak 1997-ig kell vizsgálnunk az 1-esek számát.
1	9	9	8	Ezért 2-vel kevesebb számot kapunk. Tehát az 1-es szám
1	9	9	9	$300 + 1000 + 300 - 2 = 1598$ esetben fordul elő a számozásban.

6. Jelölje a 10 000-esek számát x , az 5 000-esek és az 1 000-esek számát y , ahol x és y pozitív egészek! Ekkor a feltételek szerint: $72\,000 = 10\,000x + 6\,000y$.

Összefoglalva:	x	y	$x + 2y$	Egyszerűsítés és rendezés után $6y = 72 - 10x$. $72 - 10x$ 6-nak pozitív többszöröse. Így x lehetséges értékei: 3 és 6.
	3	7	17	
	6	2	10	

Tehát 10 vagy 17 bankjegyet kapott.

7. Az első számjegy csak 1-es lehet. A további öt szám mindegyike kétféle lehet. Ez $2^5 = 32$ számú lehetőséget jelent.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & & & & & \\ \hline \end{array} \quad 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$$

Ezek közül az az egy nem felel meg a feltételeknek, amely csak

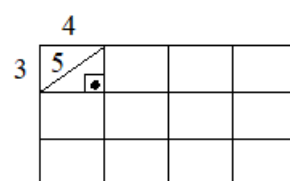
1-es számjegyből áll. Így 31 db olyan szám van, amely megfelel a feladat feltételeinek.

8. Osszuk fel a téglalapot 12 db 3×4 cm-es téglalapokra az ábrán

látható módon! Egy ilyen kis téglalapban a legnagyobb távolság az átlók hossza, amelyek a Pitagorasz-tétel alapján 5 cm hosszúságúak.

A 12 kis téglalapba 13 pont csak úgy helyezhető el, hogy valamelyik

téglalapba 2 pont kerül. Ennek a két pontnak a távolsága nem lehet több 5 cm-nél. Ezzel az állítást bebizonyítottuk. [▶](#) [«](#)



1. A fiú x számú feladatot oldott meg helyesen. Így az apának $8x$ Ft-ot kellene fizetnie, a fiúnak pedig $(26 - x)5$ Ft-ot. Ekkor egyikük sem tartozik a másiknak, azaz azonos összeggel tartoznak egymásnak. A $8x = 5(26 - x)$ egyenlet alapján: $x = 10$. A fiú 10 feladatot oldott meg helyesen.

2. Foglaljuk táblázatba az adatokat!

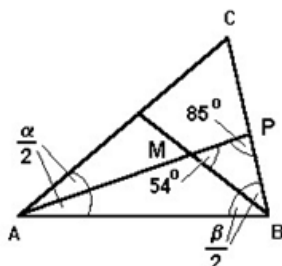
	Aladár	Benedek
1. eset: (azonos idő alatt)		
út (m)	100	90
sebesség	v	$0,9v$
2. eset		
út (m)	110	90
sebesség	v	$0,9v$

Határozzuk meg a táv megtételéhez szükséges időt! $t_A = \frac{110}{v} = \frac{99}{0,9v} < \frac{100}{0,9v} = t_B$.

Tehát Aladár nyeri a versenyt.

3. Két eset van.

1. eset



A BPMΔ-ben $85^\circ + 54^\circ + 0,5\beta = 180^\circ$.

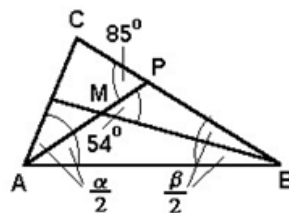
Ebből $\beta = 82^\circ$.

A BMAΔ-ben $0,5(\alpha + \beta) = 54^\circ$.

Ebből $\alpha = 26^\circ$ és $\gamma = 72^\circ$.

A háromszög szögei: $26^\circ, 72^\circ, 82^\circ$ vagy $46^\circ, 62^\circ, 72^\circ$.

2. eset



A BPMΔ-ben $85^\circ = 54^\circ + 0,5\beta$.

Ebből $\beta = 62^\circ$.

A BMAΔ-ben $0,5(\alpha + \beta) = 54^\circ$.

Ebből $\alpha = 46^\circ$ és $\gamma = 72^\circ$.

4. x kg nyers szilvából lesz 40 kg aszalt szilva.

	nyers szilva	aszalt szilva
szárazanyag (kg)	$0,2x$	$0,8 \cdot 40 = 32$

Mivel a nyers- és az aszalt szilva azonos mennyiségű szárazanyagot tartalmaz: $0,2x = 32$.

Ebből $x = 160$.

Tehát 160 kg nyers szilvából lesz 40 kg aszalt szilva.

5. Egy tartály tömege t kg, egy teli tartályban lévő anyag tömege m kg. Így a 3 tehergépkocsinak $(21t + 10,5 m)$ kg tömeget kell elszállítania. Egy-egy autóra $(7t + 3,5m)$ kg tömegnek kell esnie.

Ez az alábbi módokon lehetséges:

1. kocsi: 3 teli + 1 félig + 3 üres 3 teli + 1 félig + 3 üres = $(7t + 3,5m)$ kg.
 2. kocsi: 3 teli + 1 félig + 3 üres vagy 2 teli + 3 félig + 2 üres Ez is $(7t + 3,5m)$ kg.
 3. kocsi: 1 teli + 5 félig + 1 üres vagy 2 teli + 3 félig + 2 üres Ez is $(7t + 3,5m)$ kg.

További megoldás nincs, mert a félig töltött tartályokból mindegyik kocsin kell lennie legalább egynek.

Továbbá a félig töltött tartályok száma csak páratlan számú lehet minden kocsin. (A kocsik sorrendjétől eltekintünk).

6. A körök sugarai legyenek rendre: r , $2r$, $3r$, $4r$ és $5r$!

Így a legnagyobb kör területe: $t_0 = 25r^2\pi$.

A körgyűrű területe pedig: $t_{gy} = 16r^2\pi - 9r^2\pi = 7r^2\pi$.

A keresett arány: $t_{gy} : t_0 = 7r^2\pi : 25r^2\pi = (7 : 25) \cdot 100\% = 28\%$.

7. A háromszög magasságai 1, 2 és 3 egység hosszúak. Számoljuk ki a háromszög területét mindhárom oldal és a hozzá tartozó magasság felhasználásával: $t_\Delta = 1a/2 = 2b/2 = 3c/2$!

Így a háromszög oldalai rendre: $3x$, $1,5x$ és x hosszúságúak.

Ilyen háromszög pedig nem létezik, mert nem teljesíti a háromszög-egyenlőtlenséget: $3x$ nem kisebb, mint $1,5x + x = 2,5x$.

8. $x, y \in \mathbb{Z}$ Ha $x = 0$, akkor $y \in [-999; 999]$. Ez 1999 számpár.

Ha $x = -1$ vagy $x = 1$, akkor $y \in [-998; 998]$. Ez $2 \cdot 1997$ számpár.

Ha $x = -2$ vagy $x = 2$, akkor $y \in [-997; 997]$. Ez $2 \cdot 1995$ számpár.

Ezt folytatva $|x| = 999$ -ig.

⋮

Ha $x = -998$ vagy $x = 998$, akkor $y \in [-1; 1]$. Ez $2 \cdot 3$ számpár.

Ha $x = -999$ vagy $x = 999$, akkor $y = 0$. Ez $2 \cdot 1$ számpár.

Adjuk össze!

$$2 \cdot (1 + 3 + 5 + \dots + 1997) + 1999.$$

$$(1 + 3 + 5 + \dots + 1997) = 1 + (3 + 1997) + (5 + 1995) + \dots + (999 + 1001) = \\ = 499 \cdot 2000 + 1 = 998001$$

A megoldások száma: $2 \cdot 998001 + 1999 = 1998001$. [▶](#) [⏪](#)

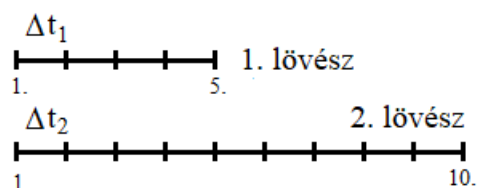
1. Használjuk az ábra jelöléseit!

Az 1. lövész esetén két lövés között $\Delta t_1 = \frac{5}{4}$ s,

a 2. esetén $\Delta t_2 = \frac{10}{9}$ s telik el. Mivel $\frac{5}{4} = \frac{10}{8} > \frac{10}{9}$,

így $\Delta t_1 > \Delta t_2$. 12 lövés leadásakor $11 \cdot \Delta t$ idő telik el. $11 \cdot \Delta t_1 > 11 \cdot \Delta t_2$

Tehát a 2. lövész a gyorsabb.



2. A keresett természetes szám legyen $n!$ $72 = 2^3 \cdot 3^2$

72 osztója n -nek, ha n osztható 8-cal és 9-cel (a 8 és a 9 relatív príme).

A 8 osztója n -nek, ha az n utolsó 3 számjegyéből álló háromjegyű szám osztható 8-cal.

A lehetséges végződések: 000; 007; 070; 700; 077; 707; 770 és 777.

Ezek közül csak az első felel meg.

Kell lennie 0-tól különböző számjegynek is: legalább egy 7-esnek. A 9 osztója n -nek, ha n számjegyeinek az összege osztható 9-cel. Ekkor pedig legalább 9 db 7-es számjegy kell, mert a 7 és a 9 relatív príme.

A legkisebb ezek közül: 777 777 777 000.

3. Jelentse x a teherautók számát ($x \in \mathbf{N}$, $x > 8$); t a garázs területét!

Az egy autó által elfoglalt hely eredetileg $\frac{t}{x-8}$, átépítés után $\frac{1,5t}{x+8}$. A feltételek szerint ez a két

érték egyenlő. $\frac{t}{x-8} = \frac{1,5t}{x+8}$. Ebből $x = 40$. Tehát a vállalkozónak 40 teherautója van.

4. Adjuk össze 20-ig azokat a természetes számokat, amelyekben a számjegyek összege páros szám: $2 + 4 + 6 + 8 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 20 = 115!$

22-40-ig a fenti számok mindegyikéhez 20-at kell adni, így az összeg: $115 + 10 \cdot 20 = 315$.

42-60-ig 40-et kell adni minden számhoz: $115 + 400 = 515$.

62-80-ig az összeg: $115 + 600 = 715$.

82-99-ig: $115 + 800 - 100 = 815$.

$101 + 103 + 1 + 118 = 95 + 1000 = 1095$. Az előzőhöz hasonlóan számolunk.

121-138-ig az összeg: $1095 + 200 = 1295$.

141-158-ig: $1095 + 400 = 1495$.

161-178-ig: $1095 + 600 = 1695$.

181-200-ig: $1095 + 800 + 200 = 2095$.

Adjuk most össze a részeredményeket: $115 + 315 + \dots + 1695 + 2095 = 10150!$

202-400-ig az eddig előforduló számok mindegyikéhez 200-at kell adni.

Eddig 10 csoport ($200 = 10 \cdot 20$) szerepelt, és minden csoportban 10 szám fordult elő. Kivétel az utolsó, amelyben 11 szám van. Így eddig $(10 \cdot 10 + 1 =)$ 101 szám összegét határoztuk meg.

A következő 101 szám összege:

$$202 + 1 + 400 = 10150 + 101 \cdot 200 = 30350.$$

Folytatva a gondolatmenetet: 402-600-ig az összeg: $10150 + 101 \cdot 400 = 50550$.

602-800-ig: $10150 + 101 \cdot 600 = 70750$.

802-998-ig: $10150 + 101 \cdot 800 - 1000 = 89950$.

Adjuk ismét össze az eddigi eredményeket: $10150 + \dots + 89950 = 251750!$

Folytassuk az előző eljárást!

$1001 + 1 + 1018 = 95 + 10000 = 10095$.

1021-1038-ig az összeg: $10095 + 200 = 10295$.

Ezt folytatva 1200-ig, 1400-ig, ... végül 1998-ig, megkapjuk az összeget: 999500.

5. 2-vel minden második szám osztható: 500,

3-mal minden harmadik: 333, 5-tel minden ötödik: 200,

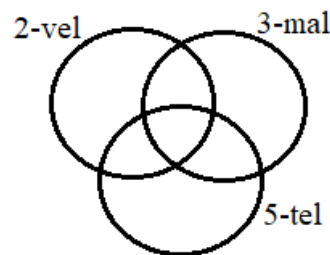
6-tal minden hatodik: 166, 10-zel minden tizedik: 100,

15-tel minden tizenötödik: 66 és 30-cal minden harmincadik: 33.

A három közül legalább az egyikkel osztható számok száma:

$500 + 333 + 200 - (166 + 100 + 66) + 33 = 734$.

Egyikkel sem osztható számok száma: $1000 - 734 = 266$.



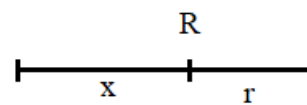
6. Használjuk az ábra jelöléseit! Ekkor $r = 1$ m.

$$t_{\text{küllő}} = \frac{(R^2 - r^2)}{8} \pi; \quad t_{\text{kör}} = r^2 \pi$$

A feltételek szerint ez a két terület egyenlő.

Ebből $R = 3$ m. Tehát a küllő hossza: $x = R - r = 2$ m.

x : a küllő hossza



7. Jelölje x az 50 Ft-osok számát, y a 20 Ft-osok számát!

Ekkor az 5 Ft-osok száma: $20 - (x + y)$. $0 < x + y < 20$, $x, y \in \mathbb{Z}$

A feltételek szerint: $50x + 20y + 5(20 - x - y) = 500$.

Egyszerűsítés és összevonás után: $9x + 3y = 80$. $3(3x + y) = 80$.

Az egyenlet bal oldala mindig osztható 3-mal, a jobb pedig nem.

Így az egyenlőség nem állhat fenn, nincs megoldás.

8. Használjuk az ábra jelöléseit! Ekkor $t_{ABCD} = ab$;

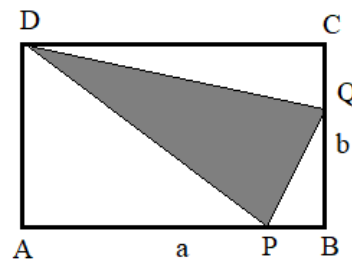
$t_{APD} = 0,5 \cdot 0,8a \cdot b = 0,4ab$; $t_{PBQ} = 0,5 \cdot 0,2a \cdot 2b/3 = ab/15$;

$t_{CDQ} = 0,5 \cdot a \cdot b/3 = ab/6$.

$t_{DPQ} = t_{ABCD} - (t_{APD} + t_{PBQ} + t_{CDQ}) = 156$.

$156 = ab - 19ab/30 = 11ab/30$.

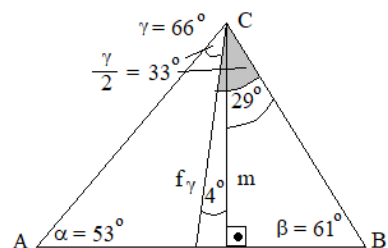
Ebből $ab = 156 \cdot 30/11 = (4680/11) \text{ cm}^2 \approx 425,45 \text{ cm}^2$.  



6. Használjuk az ábra jelöléseit!

Használjuk fel, hogy a háromszög belső szögeinek összege 180° !

A C csúsból induló magasságvonal és a belső szögfelező 4° -os szöget zár be.

**7. Használjuk az ábra jelöléseit!**

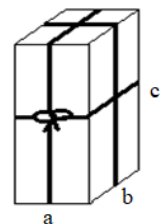
Ekkor $a = 4x$, $b = 5x$ és $c = 7x$. Számoljuk össze a kötéel hosszát!

$$(2a + 2b) + (2c + 2b) + (2c + 2a) = 4(a + b + c) = 64x.$$

A feltételek szerint: $175 - 15 = 160 = 64x$. Ebből $x = 2,5$.

Így $a = 10$ cm, $b = 12,5$ cm és $c = 17,5$ cm.

A téglatest térfogata: $V = abc = 140x^3 = 2187,5 \text{ cm}^3$.



8. a) $0,5 \cdot (13 \cdot 6) = 39$. Hogy mindenki pontosan 6 ellenfelével játsszon, 39 mérkőzésre van szükség. minden mérkőzésnek két résztvevője van.

b) $0,5 \cdot (13 \cdot 7) = 45,5$. Olyan nem lehetséges, hogy mindenki pontosan 7 ellenfelével játsszon.



1. Mivel $3 \cdot 4 = 12$, továbbá 3 és 4 relatív prímek, ezért egy szám akkor és csak akkor osztható 12-vel, ha 3-mal és 4-gyel is osztható. Mivel a szám 4-gyel osztható, ezért az oszthatósági szabály alapján $B = 2$ vagy $B = 6$ lehet.

Ha $B = 2$, akkor a 3-mal való oszthatóság

miatt $A = 0; 3; 6$ vagy 9 lehet.

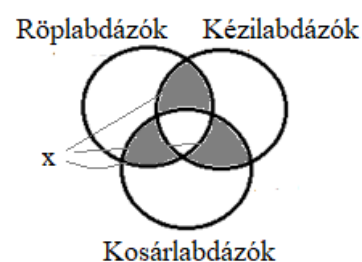
Ha $B = 6$, akkor $A = 2; 5$ vagy 8.

Táblázatba foglalva:

A	0; 3; 6; 9	2; 5; 8
B	2	6

2. Ha összeadjuk a röplabdázók, kézilabdázók és kosárlabdázók számát, akkor azokat, akik pontosan kétféle edzésre járnak (legyen a számuk x), kétszeresen, akik mindhárom edzésre járnak, háromszorosan számoljuk.

Így $12 + 13 + 16 = 30 + x + 2 \cdot 1$. Ebből $x = 9$. Tehát 9 olyan diák van az osztályban, aki kétféle edzésre jár.



3. Adjuk össze a sorösszegeket! Mivel ez éppen a táblázatba beírt számok összege, ezért mint 4 pozitív szám összege, pozitív kell hogy legyen.

Ha az oszlopösszegeket adjuk össze, az alapján a táblázatba beírt számok összegének negatívnak kellene lennie. Mivel a kettő egyszerre nem teljesülhet, a táblázat nem tölthető ki a feltételek szerint.

4. Az $1 + 2 + \dots + 1999 = 1999 \cdot (1999 + 1) / 2 = 1999000$ szám páros szám.

Ha bármelyik szám előtt az előjelet megváltoztatjuk, ez az összeg a szám kétszeresével csökken. Tehát bármilyen előjelezés esetén páros marad. A másik oldalon $1999 + 2000$ és $1999 - 2000$ is páratlan. Tehát nem tehető igazzá az egyenlőség.

5. Mivel $9 \cdot 8 = 72$, továbbá 9 és 8 relatív prímek, ezért a keresett számnak oszthatónak kell lennie 8-cal és 9-cel.

A számjegyek összegében csak a 2 számít, így a 9-cel való oszthatóság miatt legkevesebb 9 db 2-es számjegynek kell szerepelnie.

Mivel a legkisebb számot keressük, próbálkozzunk 9 db 2-sel! A 8-cal való oszthatóság miatt először vizsgáljuk meg a 222-t! Nem osztható 8-cal. Használjuk a 0-ás számjegyet is!

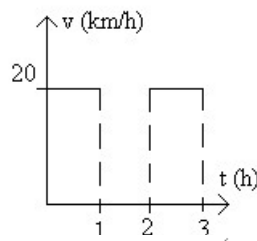
A 022; 202; 220; 002 és 020 számok nem oszthatók nyolccal. A 200 már igen.

Ezért a keresett szám első kilenc számjegye 2-es és utána még két 0 áll: 2222222200.

6. Ha a megadott számokat összeadjuk, a táncospárok számának kétszeresét, azaz páros számot kell, hogy kapjunk.

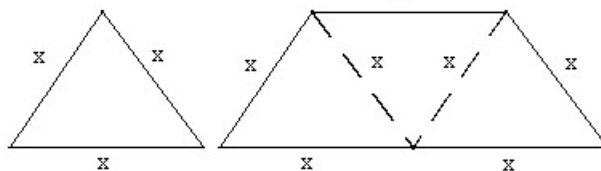
A felsorolásban viszont 13 darab, azaz páratlan számú páratlan szám található. Tehát a számok összege páratlan szám lesz. Ez ellentmondás.

7. Lehetséges. Például úgy, hogy az első és harmadik órában állandó, 20 km/h sebességgel halad, a második órában pedig zérus a sebessége.



8. A háztető felülete két szabályos háromszögből és két húrtrapézból áll.

Rajzoljuk le ezeket a síkban! Kössük össze a trapéz rövidebbik alapjának végpontjait a hosszabbik alap felezőpontjával! Így a



trapézt három olyan szabályos háromszögre bontottuk, amelyek mindegyike egybevágó az egyik oldalháromszöggel. Így a tető területe $8 \cdot 40 \text{ m}^2 = 320 \text{ m}^2$. ◀ ◀

1. Mivel 4 számjegy összege legfeljebb $36 (= 4 \cdot 9)$ lehet, így a kérdéses személy $1991 - 36 = 1955$ után született. Jelöljük $\overline{19ab}$ -vel a keresett évszámot, ahol $a, b \geq 5$.

Ekkor a feltételek szerint: $1991 - \overline{19ab} = 91 - \overline{ab} = 10 + a + b$.

Ebből $\overline{ab} + a + b = 81 = 11a + 2b$. Az utóbbi egyenlet alapján a csak páratlan számjegy lehet, mert $2b = 81 - 11a$. Az a lehetséges értékei 5, 7 és 9. Ezek közül csak a 7 felel meg a feltételeknek, és ekkor $b = 2$. A keresett születési évszám 1972, amely meg is felel a feladat feltételeinek: $1991 - 1972 = 19 = 1 + 9 + 7 + 2$.

2. Számoljuk össze e kedvező eseteket a 9-esek száma szerint! 3-nál több 9-es nem lehet a feltételek szerint.

nincs 9-es: $4^5 = 1024$ lehetőség,

1db 9-es esetén: $5 \cdot 4^4 = 1280$,

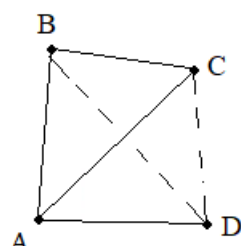
2 db 9-es esetén: $6 \cdot 4^3 = 384$,

3 db 9-es esetén: $4^2 = 16$.

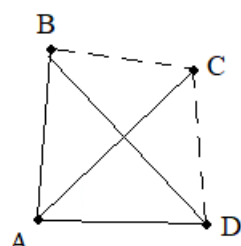
Ez összesen 2704 lehetőség.

3. Legyen A a társaság egyik tagja! Ekkor két eset lehetséges: A-nak van legalább 3 ismerőse (B, C és D), vagy 3 olyan, akit nem ismer (B', C' és D').

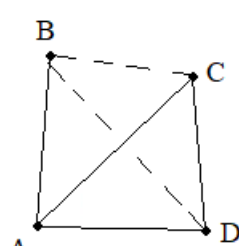
Ha van legalább 3 ismerőse, akkor az ábra szerinti esetek lehetségesek.



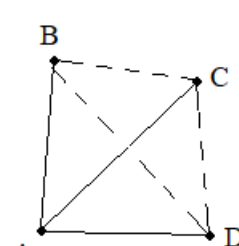
B és C ismerősök



B és D ismerősök



C és D ismerősök



B, C és D nem ismerősök

Az első három esetben mindig van 3 olyan ember, akik kölcsönösen ismerik egymást.

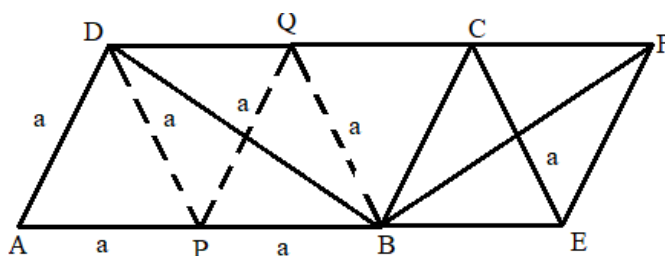
A 4. esetben pedig három olyan ember van, akik kölcsönösen nem ismerik egymást.

A másik esetben a nem ismeretiségekkel hasonló gondolatmenet után az állítást bebizonyítottuk.

4. Használjuk az ábra jelöléseit!

A feladat feltételei alapján az ABCD paralelogramma két, a BEFC rombuszal egybevágó rombuszra bontható. Így a $BF = BD$, mert egybevágó rombuszok hosszabb átlói.

Tehát a két szakasz egyenlő.



5. 9000 négyjegyű szám van, mivel 9999-ből le kell vonni a nem megfelelőket (999).

90 db kétjegyű szám van. Ezek szorzataiból $90^2/2 = 4050$ különböző szám állítható elő ($a \cdot b = b \cdot a$). Ez kevesebb, mint 9000 fele (4500). Így olyan négyjegyű számokból van több, amelyek nem állíthatók elő két kétjegyű szám szorzataként.

6. Két vagy több szám közös osztója a számok összegének is osztója. Jelöljük a legnagyobb közös osztót d -vel! Ekkor d kiemelhető a számok összegéből: $d(a_1 + a_2 + \dots + a_{49}) = 999$. A feltételek szerint az $a_1 + a_2 + \dots + a_{49}$ összeg minimum 49. Ezért d nem lehet 20-nál nagyobb ($21 \cdot 49 = 1029$). Mivel $999 = 3^3 \cdot 37$, így a pozitív osztói: 1; 3; 9; 27; 37; 111; 333 és 999. Ezek közül a 9 a legnagyobb olyan osztó, amely 21-nél kisebb. Ez meg is felel.

Mivel $999 = 18 \cdot 49 + 117 = 18 \cdot 49 + 13 \cdot 9 = 36 \cdot 18 + 13 \cdot (18 + 9) = 9 \cdot 111$ ($36 + 13 = 49$).

Tehát a 49 pozitív egész szám lehetséges legnagyobb közös osztója a 9.

7. Ha egy papírt 8 részre vágunk fel, akkor a papírok száma 7-tel növekszik. 12 esetén ez a növekedés 11. Így az a kérdés, hogy az 1 számból kiindulva 7, illetve 11 hozzáadásával elérhetjük-e, hogy az összeg 60 illetve 65 legyen. $1 + 7x + 11y = 60$ ill. $1 + 7x + 11y = 65$, ahol x és y természetes számok ($x, y \in \mathbb{N}$).

a) Rendezés után: $7x = 59 - 11y$.

Vegyük el 59-ből 11 többszöröseit ($y = 0; 1; 2; 3; 4; 5$)! y nem lehet 5-nél nagyobb, mert akkor $7x$ negatív lenne. A kivonás után rendre 59-et; 48-at; 37-et; 26-ot; 15-öt és 4-et kapunk. Ezek közül egyik sem osztható 7-tel. Tehát nincs a feltételeknek megfelelő darabolás.

b) Rendezés után: $7x = 64 - 11y$.

Vegyük el 64-ből 11 többszöröseit ($y = 0; 1; 2; 3; 4; 5$)!

A kivonás után rendre 64-et; 53-at; 42-t; 31-et; 20-at és 9-et kapunk.

Ezek közül a 42 osztható 7-tel.

Azaz $1 + 6 \cdot 7 + 2 \cdot 11 = 65$. Vagyis elérhető a feltételeknek megfelelő darabolással, hogy 65 papírunk legyen.

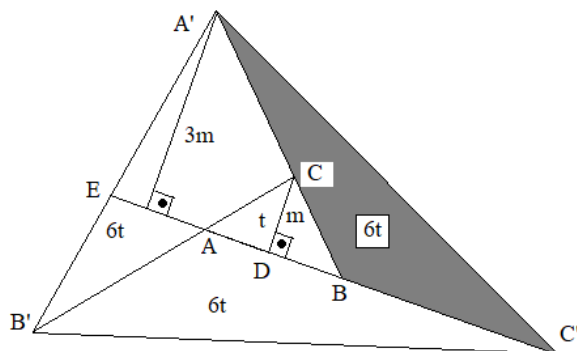
8. Használjuk az ábra jelöléseit!

Az $ABC\Delta$ területét jelölje t , magasságát m !

Ekkor az $A'BC'\Delta$ magassága $3m$, mert $BA' = 3BC$. Így az $A'BC'\Delta$ területe $6t$, mert alapja $BC' = 2AB$, és magassága $3m$.

Hasonlóan $6t$ a területe az $A'B'C\Delta$ -nek és az $AB'C'\Delta$ -nek.

Tehát az $A'B'C'\Delta$ terület 19-szerese az $ABC\Delta$ területének: $t_{A'B'C'} = 19 \cdot t$.  



1. A hatványozás azonosságait felhasználva alakítsuk át a kifejezéseket!

$$44^4 = 11^4 \cdot 4^4;$$

$$4^{44} = 4^{40} \cdot 4^4 = (4^{10})^4 \cdot 4^4;$$

$$4^{(4^4)} = 4^{256};$$

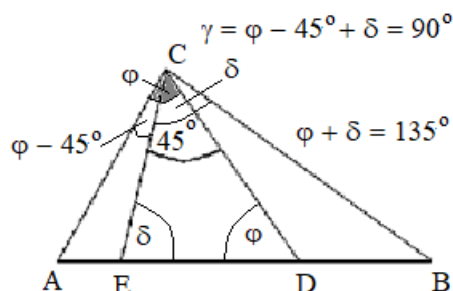
$$(4^4)^4 = 4^{16} = 4^{12} \cdot 4^4 = (4^3)^4 \cdot 4^4.$$

Így a növekvő sorrend: $44^4 < (4^4)^4 = 4^{16} < 4^{44} < 4^{(4^4)} = 4^{256}$.

2. Ha $a \heartsuit b = ab + a + b$, akkor $3 \heartsuit 5 = 3 \cdot 5 + 3 + 5 = 23$, és $2 \heartsuit x = 2x + 2 + x = 3x + 2 = 23$.
Ebből $x = 7$.

3. Használjuk az ábra jelöléseit!

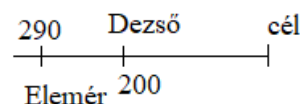
A feltételek szerint az $ACD\Delta$ egyenlő szárú. A C és D csúcsnál lévő szögeit φ -vel jelöltük. Hasonlóan a $BCE\Delta$ -ben az egyenlő szögeket δ jelöli. Ekkor a $CDE\Delta$ -ben a belső szögek összegéről tanultak alapján $\varphi + \delta = 135^\circ$. Így az $ABC\Delta$ γ szöge meghatározható:
 $\gamma = \varphi - 45^\circ + \delta = 90^\circ$.



Tehát az $ABC\Delta$ derékszögű.

4. Jelöljük t -vel azt az időt, amely alatt a győztes lefutotta a 2000 m-t!

Ekkor Dezső és Elemér sebessége: $v_D = \frac{1800}{t}$, $v_E = \frac{1710}{t}$.



Dezső a hátralévő 200 m-t $t_D = \frac{200}{1800} t = \frac{t}{9}$ idő alatt teszi meg.

Ezalatt Elemér $s_E = v_E \cdot t_D = \frac{1710}{t} \cdot \frac{t}{9} = 190$ m-t tett meg.

Így Elemér 100 m-re lesz Dezső mögött, amikor Dezső célba ér.

5. 16 db olyan 2×2 -es négyzet van, amelyek a feltételnek megfelelnek. Az ábrán csillaggal jelölt négyzetek 4-4 (ez összesen $4 \cdot 4 = 16$) 2×2 -es négyzetben szerepelnek.

Ezekbe a négyzetekbe írjunk negatív számokat úgy, hogy a feltételeknek megfeleljenek! Ekkor többféleképpen is megoldható a feladat. A második ábra egy lehetséges megoldást szemléltet.

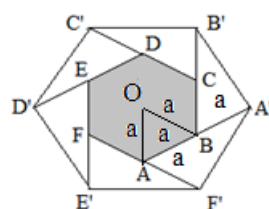
$$4 \cdot (-4) + 21 \cdot 1 = 5 > 0.$$

	*		*	
	*		*	

1	1	1	1	1
1	-4	1	-4	1
1	1	1	1	1
1	-4	1	-4	1
1	1	1	1	1

6. Használjuk az ábra jelöléseit!

A szabályos hatszög hat a oldalú szabályos háromszögre bontható: $t_{hsz} = 6t$. A szabályos hatszög szögeiről tanultakat felhasználva az $AA'F'\Delta$ egy olyan szabályos háromszög szimmetrikus fele, amelynek $2a$ az átfogója. A $2a$ oldalú szabályos háromszög területe az a oldalú szabályos háromszög területének négyszerese ($4t$). Mivel három $2a$

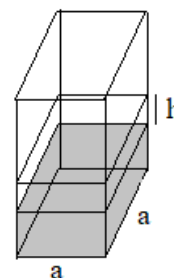


oldalú háromszög területével, azaz 12t-vel növeltük meg az eredeti hatszög területét, így $t_{A'B'C'D'E'F'} = 18t_{ABCDEF} = 3 \cdot 6t$. Tehát a háromszorososa: $t_{A'B'C'D'E'F'} = 3t_{ABCDEF}$.

7. Használjuk az ábra jelöléseit!

$$A = a^2 = 144 \text{ cm}^2, V = 36V_k = Ah = 288 \text{ cm}^3. \text{ Ebből } V_k = b^3 = 8 \text{ cm}^3;$$

$$\text{Egy ilyen kis kocka felszíne: } A_k = 6b^2 = 24 \text{ cm}^2.$$



8. Jelöljük a számot n -nel! Ekkor $n - 1$ osztható 25-tel és 80-nal. A két szám legkisebb közös többszöröse: $[25; 80] = 400$ ($25 = 5^2$; $80 = 2^4 \cdot 5$). A számok $400k + 1$ alakúak: 1; 401; 801; 1201; 1601; 2001; 2401; 2801; ...

Így a maradékok: 1; 401; 801; 1201 és 1601.

Megjegyzés:

Ha a szám negatív is lehet, akkor a számok:

... ; -2399; -1999; -1599; -1199; -799; -399; 1; 401; 801; 1201; 1601; 2001; 2401; ...

$$\text{Ekkor } -2399 = -96 \cdot 25 + 1 = -30 \cdot 80 + 1 = -2 \cdot 2000 + 1601;$$

$$-1999 = -80 \cdot 25 + 1 = -25 \cdot 80 + 1 = -1 \cdot 2000 + 1;$$

$$-1599 = -64 \cdot 25 + 1 = -20 \cdot 80 + 1 = -1 \cdot 2000 + 401, \text{ és így tovább.}$$

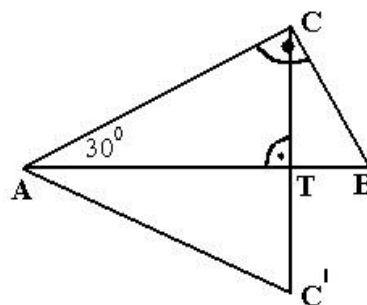
Tehát a maradékok halmaza nem változik.  

1. Dani másodpercenként 3 m-rel többet tesz meg, mint András.

Ezért $(120 \text{ m} : 3 \text{ m/s} =) 40 \text{ s}$ alatt éri utol Dani Andrást.

2. $CT = 5 \text{ cm}$. Ha C-t T-re tükrözzük, a kapott ACC' háromszög szabályos lesz.

Emiatt $AC = 2CT = 10 \text{ cm}$.



3. Ha két szám 75-tel osztva ugyanazt a maradékot adja, akkor

különbségük osztható 75-tel. 75-tel való osztásnál legfeljebb 75-féle maradékot kaphatunk.

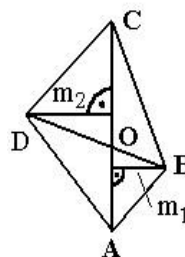
Emiatt a $2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots, 2^{76}$ számok között biztosan lesz legalább 2 olyan, melyek ugyanazt a maradékot adják, tehát különbségük osztható 75-tel.

4. α 8-cal, β 9-cel és γ 12-vel osztható mérőszámú hegyesszögek. α lehet: $8^\circ, 16^\circ, 24^\circ, 32^\circ, 40^\circ, 48^\circ, 56^\circ, 64^\circ, 72^\circ, 80^\circ, 88^\circ$. Mivel α és γ páros, így β is az kell, hogy legyen, ezért β lehetséges értékei: $18^\circ, 36^\circ, 54^\circ, 72^\circ$. Figyelembe véve, hogy $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, a szóba jöhető számhármassok: $(24^\circ, 72^\circ, 84^\circ), (32^\circ, 72^\circ, 76^\circ), (40^\circ, 72^\circ, 68^\circ), (40^\circ, 54^\circ, 86^\circ), (48^\circ, 72^\circ, 60^\circ), (48^\circ, 54^\circ, 78^\circ), (56^\circ, 72^\circ, 52^\circ), (56^\circ, 54^\circ, 70^\circ), (56^\circ, 36^\circ, 88^\circ), (64^\circ, 72^\circ, 44^\circ), (64^\circ, 54^\circ, 62^\circ), (64^\circ, 36^\circ, 80^\circ), (72^\circ, 72^\circ, 36^\circ), (72^\circ, 54^\circ, 54^\circ), (72^\circ, 36^\circ, 72^\circ), (80^\circ, 72^\circ, 28^\circ), (80^\circ, 54^\circ, 46^\circ), (80^\circ, 36^\circ, 64^\circ), (80^\circ, 18^\circ, 82^\circ), (88^\circ, 72^\circ, 20^\circ), (88^\circ, 54^\circ, 38^\circ), (88^\circ, 36^\circ, 56^\circ), (88^\circ, 18^\circ, 74^\circ)$. Ezek közül annak a feltételnek, hogy γ 12-vel osztható legyen, megfelelnek: $(24^\circ, 72^\circ, 84^\circ), (48^\circ, 72^\circ, 60^\circ), (72^\circ, 72^\circ, 36^\circ), (72^\circ, 36^\circ, 72^\circ)$.

5. Legyen Kolja most x éves, és Olja y éves! Így a feladat feltételeiből következik, hogy Polja néni $x + y$ éves volt, amikor Kolja y éves volt. Tehát Polja néni x évvel idősebb Koljánál, így most $2x$ éves. Így x évvel ezelőtt volt olyan idős, mint Kolja most, és Kolja éppen akkor született.

6. Elég két hordár. Az első nap végén mindenkinek háromnapi készlet van. Az egyik hordár átad 1-1 napi készletet a másik hordárnak és a kutatónak, a maradék egynapi készlettel pedig visszafordul. A második nap végén a kutatónál és a vele lévő hordárnál háromnapi készlet van. Ebből a hordár egynapit átad a kutatónak, a maradék kettővel pedig visszafordul. Így a kutató a nála lévő 4 napi készlettel meg tudja tenni a hátralévő négynapos utat.

7. A két adott területű háromszög az ábrán a BOC és a BOA háromszög. Az AC átló a négyszöget egy $3 \text{ cm}^2 + 5 \text{ cm}^2 = 8 \text{ cm}^2$, és egy $24 \text{ cm}^2 - 8 \text{ cm}^2 = 16 \text{ cm}^2$ területű háromszögre bontja (mivel a négyszög területe 24 cm^2). Az ACB háromszög területe fele az ACD háromszög területének. Ezért az AC alaphoz tartozó m_1 magasság fele az m_2 magasságnak. Az m_1 magasság az AOB és az OCB háromszög közös magassága. Az m_2 magasság pedig az AOD és a DOC háromszög közös magassága. Mivel az AOB és az AOD háromszögnek ugyanaz az alapja, az AOB magassága pedig fele az AOD magasságának, ezért az AOD háromszög területe kétszerese az AOB háromszög területének, azaz 6 cm^2 . Az ODC háromszög területe ehhez hasonlóan 10 cm^2 .



8. A teljes táv 5000 m. Amikor a győztes áthalad a célon, 5000 m-t tett meg, Béla 500 m-rel mögötte van, tehát 4500 m-t tett meg, Csaba pedig 725 m-rel van mögötte, tehát 4275 m-t tett meg. Így 4500 m megtétele után Csaba 225 m-rel van lemaradva Bélától. Ez azt jelenti, hogy amíg Béla 1 m-t, addig Csaba átlagosan $225 : 4500 = 0,05$ m-rel kevesebbet, azaz 0,95 m-t tesz meg. Így a további 500 m alatt $0,05 \cdot 500 = 25$ m-rel nő a köztük lévő távolság. Tehát amikor Béla áthalad a célon, Csaba $225 + 25 = 250$ m-rel marad el tőle. ◀ ◀

1. A megmaradt 4 körte fél körtével kevesebb, mint az utolsó maradék fele, tehát az utolsó maradék 9.

Ebből a harmadik testvér $4,5 + 0,5 = 5$ körtét kapott.

A 9 körte is fél körtével kevesebb, mint az első maradék fele, vagyis $(9 + 0,5)2 = 19$. Tehát a második testvér $9,5 + 0,5 = 10$ körtét kapott.

A 19 körte 0,5 körtével kevesebb, mint az összes körte fele, azaz $(19 + 0,5)2 = 39$ körte volt a kosárban, így az első testvér 20 körtét kapott.

2. Legyenek a téglalap oldalai a és b ! Tudjuk, hogy $ab = 2(a + b)$.

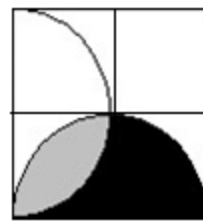
Innen: $2a + 2b = ab$, majd $\frac{2a+2b}{ab} = 1$, egyszerűsítés után $\frac{2}{b} + \frac{2}{a} = 1$.

a és b egyike sem lehet 1 vagy 2, mert akkor túl nagy lenne a bal oldali összeg. Nem lehet mindkét szám 4-nél nagyobb, mert akkor 1-nél kisebb lenne a bal oldali összeg.

Tehát az oldalak közül az egyik, mondjuk $a = 3$ vagy 4. Ha $a = 3$, akkor $b = 6$, ha pedig $a = 4$, akkor $b = 4$. Tehát a téglalap oldalai 3 és 6, vagy pedig mindkettő 4.

3. Az 0,5 sugarú negyed kört területe: $t_{nk} = \frac{0,5^2 \pi}{4}$. Egy kis négyzet $t_n = 0,25$.

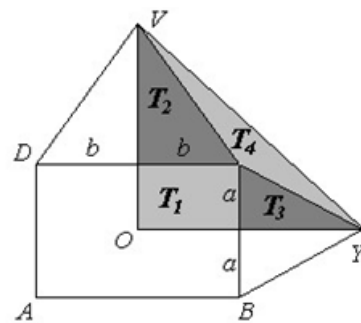
A bal alsó négyzet két 0,5 sugarú negyed kör uniója, ahol a világosszürke részt kétszer fedtük le. Így ennek a területe: $t_{sz} = 2t_{nk} - t_n$. A keresett rész területét úgy kapjuk meg, hogy a 0,5 sugarú félkör területéből levonjuk a világosszürke területrészt: $t = 2t_{nk} - (2t_{nk} - t_n) = t_n = 0,25 \text{ cm}^2$.



4. Az első hajtás után $2 \cdot 0,1 = 0,2$ mm, a második hajtás után $2 \cdot 0,2 = 0,4$ mm, a harmadik hajtás után $2 \cdot 0,4 = 0,8$ mm, vagyis az n -dik hajtás után $0,1 \cdot 2^n$ mm vastag lenne az összehajtott újságlap. Így a tizedik hajtás eredménye: $0,1 \cdot 2^{10} = 102,4 \text{ mm} = 10,24 \text{ cm}$; a huszadik hajtás eredménye: $0,1 \cdot 2^{20} = 104857,6 \text{ mm} \approx 105 \text{ m}$.

5. Használjuk az ábra jelöléseit! Az ábrát az XV, YW szimmetriatengelyek négy egybevágó részre osztják, ezért csak egy ilyen negyedét vizsgálunk. Azt állítjuk, hogy $T_1 = T_4$.

$T_1 = ab$. A T_2 területű rész egy derékszögű háromszög, melynek egyik befogója b , átfogója $2b$. A másik befogót Pitagorasz tételével kapjuk meg: $b\sqrt{3}$. Így $T_2 = 0,5b^2\sqrt{3}$. Hasonlóan kapjuk meg T_3 területét is: $T_3 = 0,5a^2\sqrt{3}$.



Az $OYV\Delta$ is derékszögű, befogói: $b + a\sqrt{3}$ és $a + b\sqrt{3}$. Így, területe: $T_{OYV} = \frac{4ab + a^2\sqrt{3} + b^2\sqrt{3}}{2}$.

$T_4 = T_{OYV} - T_1 - T_2 - T_3 = ab$, tehát $T_4 = T_1$. Ezt akartuk bizonyítani.

6. Csoportosítsunk!

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2000}\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \dots + \frac{2}{2000}\right) + \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{5} + \dots + \frac{3}{2000}\right) + \dots + \left(\frac{1999}{2000}\right) = ?$$

Az első két zárójeles kifejezésből $\frac{1}{3}$, az első háromból $\frac{1}{4}$, ..., az első k-ból $\frac{1}{k+1}$ emelhető ki:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}(1+2) + \frac{1}{4}(1+2+3) + \dots + \frac{1}{2000}(1+2+3+\dots+1999)$$

A zárójelben minden tag esetén a nevezőnél eggyel kisebb számig áll a pozitív egész számok összege. Így a k. tag $\frac{1}{k+1} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k}{2}$. Az így kialakított összegből $\frac{1}{2}$ -t kiemelve:

$$\frac{1}{2}(1+2+\dots+1999) = \frac{1}{2} \frac{1999(1999+1)}{2} = 1999 \cdot 500 = 999\,500.$$

Tehát a kifejezés pontos értéke 999 500.

7. Tekintsük a bábuk olyan kedvezőtlen elrendezését, amikor egyik bábu sem azon a mezőn fekszik, amelyiknek a számát viseli! A legrosszabb eset az, amelynél két bábu egymással helyet cserélt. Tegyük fel, hogy az 1-es mezőn a 15-ös bábu, a 15-ös mezőn az 1-es bábu áll! Ebben az esetben a két bábút három húzással tudjuk megcserélni (1-es üres helyre, 15-ös a helyére, 1-es a helyére), melynek végén a két bábu a hozzájuk tartozó mezőre kerül.

Ezért, hogy mind az 50 bábút (25 párt) a helyére húzzuk, legfeljebb $3 \cdot 25 = 75$ húzás szükséges.

8. Szabolcsnak van a legkevesebb pontja, Árpáddal együtt mégis $18/2=9$ pontja van. Szabolcsnak nem lehet 1 pontja, mert ő fogta a legtöbb halat, ezért 2 vagy 3 pontja van (4 nem lehet, mert akkor a másik páros egyik tagjának 4-nél kevesebb pontja lenne), Árpádnak pedig 7 vagy 6. A másik párosnak hasonlóképpen 4 vagy 5 pontja van, hiszen ők is 9 ponton osztoznak.

Szabolcs többet fogott, mint társai, ezért legalább 3 halat zsákmányolt (ellenkező esetben a többiek közül mindenki 1 halat fogott, és az összes fogás 3 sügér lett volna). Ha Szabolcs legalább három halat fogott, és legfeljebb három pontot kapott, akkor zsákmánya csak 3 durbincs lehetett. A maradék 15 pontot elosztjuk, figyelve a következőkre:

1. Egyik horgász sem fogott két halnál többet.
2. A felosztás egyetlen lehetősége az 5, 4 és 6 pont (Árpádnak van 6 pontja).
3. A 6 pont a három sügérért járt.

Árpád 6 pontot szerzett, és mégis legfeljebb két halat fogott, amelyek között nem volt fogas. Tehát egy dévérkeszeget és egy sügért fogott.

Maradt még két sügér összesen 4 pontért. Az, akinek fogas akadt a horgára, nem foghatott több halat, mert a fogas 5 pontot ér. Így az eredmények:

Árpád 6 pont (egy dévér és egy sügér), Levente 5 pont (egy fogas), Béla 4 pont (két sügér), Szabolcs 3 pont (három durbincs).  

1. Jelölje a, b, c és d rendre az Anna, Beáta, Cecília és Dóra által fizetett összeget forintban!

Ekkor a feltételek szerint:

$$(1) \quad a + b + c + d = 900.$$

$$(2) \quad a + 3a = 900 \rightarrow a = 225.$$

$$(3) \quad b + 4b = 900 \rightarrow b = 180.$$

$$(4) \quad c + 5c = 900 \rightarrow c = 150.$$

Így az (1) egyenlet alapján $d = 345$. Ez meg is felel a feladat feltételeinek.

Tehát Dóra 345 Ft-ot fizetett.

2. Használjuk az ábra jelöléseit!

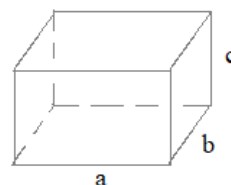
Ekkor a feltételek szerint: $a + b + c = 200$ és $a : b : c = 5 : 7 : 13$.

A második feltétel miatt: $a = 5x$, $b = 7x$ és $c = 13x$. Ez az első feltétel felhasználásával a $25x = 200$ egyenlethez vezet. Ebből $x = 8$.

Így $a = 40$ cm, $b = 56$ cm és $c = 104$ cm. Ekkor a test felszíne:

$$A = 2(ab + ac + bc) = 24448 \text{ cm}^2 = 244,48 \text{ dm}^2,$$

$$\text{térfogata: } V = abc = 232960 \text{ cm}^3 = 0,23296 \text{ m}^3.$$



3. Határozzuk meg az egyenlet alaphalmazát! $x \neq -2$, $A = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$.

Rendezzük a $\frac{4x+5}{x+2} + 3 = \frac{x-1}{x+2} + 6$ egyenletet!

$$\frac{4x+5}{x+2} - \frac{x-1}{x+2} = 3$$

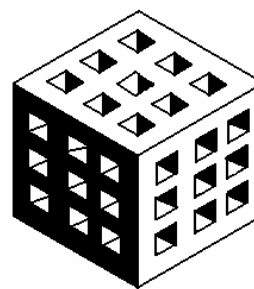
$$\frac{3x+6}{x+2} = \frac{3(x+2)}{x+2} = 3 = 3.$$

Látható, hogy azonosságot kaptunk. Így az alaphalmaz minden eleme megoldása az egyenletnek. Tehát -2 kivételével minden valós szám megoldás: $M = A = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$.

4. A 7 cm oldalhosszúságú kocka térfogata: $V = 7^3 \text{ cm}^3 = 343 \text{ cm}^3$. A lyukas kocka térfogatát úgy számoljuk ki, hogy az eredeti kocka térfogatából kivonjuk a lyukak térfogatát:

$$V_{\ell} = V - 9 \cdot 7 - 2(9 \cdot 7 - 3 \cdot 9) = (343 - 135) \text{ cm}^3 = 208 \text{ cm}^3.$$

A második és a harmadik irányból történő lyukasztás esetén a közös részek térfogatát is figyelembe kell venni (ez 27 db 1 cm^3 -es kis kocka), hogy csak 1-szer vegyük számításba.



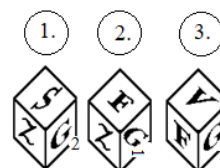
5. A kocka nézetei alapján megállapítható, hogy a kockán lévő betűk:

V, F, G_1 , S, Z és G_2 .

A 3. nézet alapján a V alatti, és az attól jobbra lévő mező kitölthető (F, G_1).

A 2. nézet alapján Z a V-vel szemben helyezkedik el.

Az 1. nézet alapján Z fölé S, Z, mellé G (G_2) kerül.



A megoldást a mellékelt ábra szemlélteti.

6. Alakítsuk át az egyenletet! $2x^3 + xy - 5 = 0$, $x, y \in \mathbb{Z}$ ($(x, y) \in \mathbb{Z}^2$).

$$x(2x^2 + y) = 5.$$

Vegyük észre, hogy x és $2x^2 + y$ az 5 osztói közül kerülhet ki!

$5 = 1 \cdot 5 = 5 \cdot 1 = (-1) \cdot (-5) = (-5) \cdot (-1)$. A megoldásokat az alábbi táblázatba foglaltuk.

x	-5		-1	1	5
y	-51		-7	3	-49

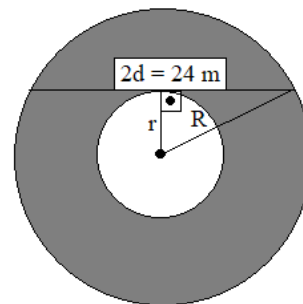
7. Használjuk az ábra jelöléseit!

Ekkor a körfolyosó területe: $t = R^2\pi - r^2\pi = (R^2 - r^2)\pi$.

Az ábrán látható derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján: $d^2 = R^2 - r^2 = 12^2 = 144$. Így a folyosó területe: $t = 144\pi \text{ m}^2$.

Tehát a körfolyosó kövezésének költsége:

$$5000 \cdot 144\pi \text{ Ft} \approx 2\,261\,947 \text{ Ft}.$$



8. Az n természetes szám 3-mal való osztási maradékai a 0; 1 és 2

lehet. Azaz: $n = 3k$, $n = 3k + 1$ vagy $n = 3k + 2$ alakú lehet, ahol k természetes szám ($k \in \mathbb{N}$).

Foglaljuk táblázatba a vizsgálataink eredményeit!

n	$3k$	$3k + 1$	$3k + 2$
$n + 17$	$3k + 17$	<u>$3k + 18 = 3(k + 6)$</u>	$3k + 19$
$n + 19$	$3k + 19$	$3k + 20$	<u>$3k + 21 = 3(k + 7)$</u>
$n + 21$	<u>$3k + 21 = 3(k + 7)$</u>	$3k + 22$	$3k + 23$

A táblázatban látható, hogy mindhárom esetben mindig van olyan szám, amely osztható 3-mal.

Tehát nincs olyan $n \in \mathbb{N}$ szám, amelyre $n + 17$, $n + 19$ és az $n + 21$ számok egyszerre prím számok lennének. [◀](#) [«](#)

1. Jelöljük a különbséget x -szel (x nemnegatív)! Ekkor $\alpha = \beta - x$ és $\gamma = \beta + x$.

A háromszög szögeinek összege: $\beta - x + \beta + \beta + x = 180^\circ$, innen $\beta = 60^\circ$.

Mivel a háromszög derékszögű, ezért a legnagyobb szöge $\gamma = 90^\circ$.

Ekkor viszont $x = 30^\circ$, tehát $\alpha = 30^\circ$.

2. Foglaljuk táblázatba a feladat adatait!

	százask	tízesek	egyesek	a szám
eredeti szám:	$9 - x$	y	x	$100(9 - x) + 10y + x$
felcserélés után:	x	y	$9 - x$	$100x + 10y + 9 - x$

Az ebből nyerhető egyenlet: $99x + 10y + 9 - (900 - 99x + 10y) = 693$.

Ahonnán $x = 8$.

Mivel az eredmény y -től független, ezért y lehetséges értékei: $y=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

A feladat összes megoldása: 108, 118, 128, 138, 148, 158, 168, 178, 188, 198.

Tehát tíz ilyen szám van.

3. Jelöljük x -szel az osztályba járó tanulók számát!

Ekkor a feltételek szerint: $0,7x + 0,8x + 0,9x = 2(x - 12) + 3 \cdot 12$. Innen $x=30$.

Tehát az osztályba 30 tanuló jár.

$$\begin{array}{r}
 4. \quad \begin{array}{r} 2001 \text{ db } 0 \\ 1000 \dots 00000 \\ - \quad \quad \quad 2002 \\ \hline 999 \dots 97998 \end{array}
 \end{array}$$

2001-4+2 db 9-es, ezért a számjegyek összege $2001 \cdot 9 - 2 - 1 = 18006$.

A szám számjegyeinek az összege 18006.

5. Mivel a hasonlóság aránya 2, ezért a festendő felület $2^2 = 4$ -szeresére, a festék mennyisége $2^3 = 8$ -szorosára nő.

Tehát Törpilla ki tudja festeni a házát, sőt a festék fele meg is marad.

6. Használjuk az ábra jelöléseit!

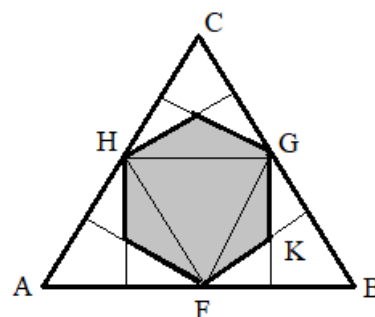
$t_{BGF} = 0,25 t_{ABC}$, mert a hasonlóság aránya 1 : 2.

$t_{KGF} = \frac{1}{3} t_{BGF}$, mert a magasság harmada. Így $t_{KGF} = \frac{1}{12} t_{ABC}$.

Használjuk fel, hogy az ábra 120° -os forgásszimmetriával rendelkezik!

Tehát a hatszög területe: $t = 0,25 t_{ABC} + 3 \frac{1}{12} t_{ABC} = 0,5 t_{ABC}$.

A két háromszög területe egyenlő. Ezért Triász és Triana ugyanannyi tortát kap.



7. Használjuk a táblázat adatait (jelöléseit)!

Az összeg: $7+2+6=15$.

A feltételek miatt felírható a következő három egyenlet:

$$7+x+c=15,$$

$$2+x+b=15,$$

$$6+x+a=15.$$

Adjuk össze a három egyenletet: $7+2+6 + 3x + a + b + c = 45$! Innen $x = 5$.

Ebből az összes hiányzó szám meghatározható.

Tehát a telefonszám: 744 - 258 - 663.

7		a
2	x	b
6		c

7	4	4
2	5	8
6	6	3

8. Használjuk az ábra jelöléseit!

Kössük össze a kör középpontját (K-t) a sokszög csúcaival!

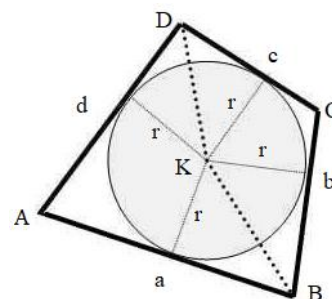
Így a sokszöget háromszögekre bontjuk.

Egy ilyen háromszög, pl. az $ABK\Delta$ területe: $0,5 \cdot a \cdot r$.

Ha összeadjuk ezeknek a háromszögeknek a területét:

$$t_{ABCD} = 0,5 \cdot r \cdot (a + b + c + d) = 0,5 \cdot r \cdot k, \text{ ahol } k \text{ a sokszög kerülete.}$$

Ebből a kerítés hossza 78 méter. [▶](#) [«](#)



- 1. a)** $x^2 - 2x + 1 = 16$. Vegyük észre, hogy $(x - 1)^2 = 16$!

Ebből $x - 1 = 4$ vagy $x - 1 = -4$. Így $x_1 = 5$ vagy $x_2 = -3$.

- b)** $(x - 3,2)(x + 2,8)(y - 1,4) = 0$.

Egy szorzat akkor és csakis akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla.

Ha $x - 3,2 = 0$, akkor $x_1 = 3,2$ és y_1 tetszőleges valós szám, vagy

ha $x + 2,8 = 0$, akkor $x_2 = -2,8$ és y_2 tetszőleges valós szám, vagy

ha $y - 1,4 = 0$, akkor $y_3 = 1,4$ és x_3 tetszőleges valós szám.

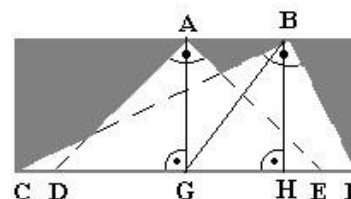
- 2. $\triangle ADE$ egyenlő szárú derékszögű, így $DG = GE = GA = 2 \text{ m}$.**

A Thalész-tétel értelmében: $CG = GF = GB = 2,5 \text{ m}$.

A BGHΔ-re írjuk fel a Pitagorasz-tételt: $GH = x$, $2,5^2 = x^2 + 2^2$!

Ebből $x = 1.5 \text{ m}$.

Tehát $AB = GH = x = 1,5 \text{ m}$.



- 3. a)** $x^2y + x^2 - 300 = 0$, ahol $x, y \in \mathbb{Z}$. Átalakítás után: $x^2(y + 1) = 300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$.

Mivel $x^2 > 0$, így $y + 1$ is csak pozitív lehet.

Ezt felhasználva x^2 ; x ; y lehetséges értékei:

1; ± 1 ; 299, 4; ± 2 ; 74, 25 ± 5 ; 11, vagy 100; ± 10 ; 2.

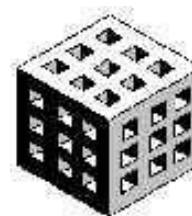
- b) $\frac{4x-8}{x-3} + 1 = \frac{x+1}{x-3} + 3$. A nevező nem lehet nulla. Ezért $x \neq 3$.

Rendezés után: $\frac{3x-9}{x-3} = \frac{3(x-3)}{x-3} = 3 \neq 2$. Az egyenletnek nincs megoldása.

- 4.** A kilgyuggatott kocka oldallapiainak területe: $6 \cdot (7 \cdot 7 - 9) = 240 \text{ cm}^2$.

A lyukak mentén keletkezett felületek területe: $27 \cdot 4 \cdot 4 = 432 \text{ cm}^2$.

Így a test felszíne 672 cm^2 .



- ## 5. Használjuk az ábra jelöléseit!

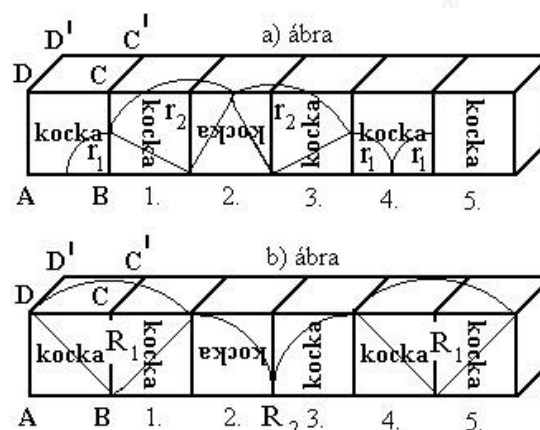
A pontok körpályákon mozognak.

Jelöljük a kocka élet a -val!

Ekkor az a) ábra alapján: $r_1 = 0,5a$,

$$r_2 = \sqrt{(0,5a)^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

A b) ábra alapján: $R_1 = a\sqrt{2}$.

$$R_2 = a.$$


6. Az egyik túrázónak $4 = 12/3$, a másiknak $3 = 9/3$ szendvicse volt.

$(12/3) + (9/3) = (21/3)$ -ot három egyenlő részre osztva $(7/3)$ -ot kapunk.

Az első turista $(5/3)$, a második $(2/3)$ szendvicset adott a katonának. Ezért a 140 Ft-ot is 5 : 2 arányban kell elosztani: az első turistának 100 Ft, a másodiknak 40 Ft jár. Nem volt igazságos a pénz elosztása.

7. Az $n + 29$, az $n + 31$ és az $n + 33$ egész számok egymást követő páros vagy páratlan számok. A három szám csak úgy lehet egyszerre prímszám, ha mindhárom páratlan. Három egymást követő páratlan szám közül egy mindig osztható 3-mal.

A három szám csak úgy lehet egyszerre prím, ha az egyik 3-mal egyenlő: $n - 26$ esetén $n + 29 = 3$, $n + 31 = 5$ és $n + 33 = 7$ (a legkisebb számnak kell 3-mal egyenlőnek lennie, mert $a - 1$ és az 1 nem prím).

Ha a negatív prímeket is megengedjük, akkor a legnagyobbknak kell -3 -mal egyenlőnek lennie: $n = -36$ esetén $n + 29 = -7$, $n + 31 = -5$ és $n + 33 = -3$.

8. Bővítsük az első törtet kettővel!

$$\frac{22222222221}{33333333332} = \frac{44444444442}{66666666664}, \quad \frac{44444444442}{66666666665}$$

Mivel a törtek számlálója azonos, az a nagyobb, amelyiknek kisebb a nevezője.

$$\frac{22222222221}{33333333332} > \frac{44444444442}{66666666664}, \text{ az első tört a nagyobb. } \triangleleft \ll$$

1. Oldjuk meg grafikusán az egyenlőtlenségeket!

a) Ábrázoljuk a függvényeket!

A megoldás az ábráról leolvasható.

$M =]0; 1[: 0 < x < 1$.

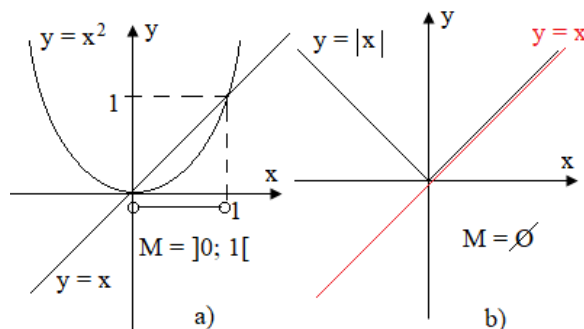
b) $M = \emptyset$. Nincs ilyen valós szám.

c) Rendezzük az egyenletet!

$$\frac{7}{9}x - \frac{7}{12} - \frac{2}{3}x + \frac{2}{5} = \frac{1}{5}x - \frac{2}{15},$$

$$\frac{4}{9}x = -\frac{1}{4},$$

$$x = -\frac{9}{16}.$$



2. Gondolatban különböztessük meg a két 1-est! Ekkor négy különböző számunk van. Ezekkel $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ szám képezhető. Így mindig lesz két-két szám, amelyek egyenlők, és csak az 1-esek sorrendjében különböznek. Minden szám kétszer fordul elő, tehát 12 különböző szám képezhető.

4	3	2	1

3. A téglalap oldalait jelölje a és b, a területét t! Ekkor $t = ab$.

Az új téglalap oldalai: a és b + 2,1, a területe: $t' = a(b + 2,1) = 1,2t = t + 8,4$.

Ebből $t = 42 \text{ cm}^2$, $a = 4 \text{ cm}$ és $b = 10,5 \text{ cm}$. Az eredeti téglalap kerülete: $k = 2(a + b) = 29 \text{ cm}$.

4. Számoljuk össze az 5-ös számjegyek számát a helyiértékek szerint haladva!

Az egyesek helyén 5-ös áll az $5 + 10k$ ($k = 0; 1; 2; \dots; 55$) alakú számok esetén. Ez 56 db 5-ös számjegyet jelent.

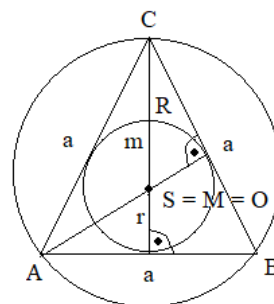
A tízesek helyén 5-ös áll az $50 + 100k$; $51 + 100k$; $\dots$; $59 + 100k$ ($k = 0; 1; 2; 3; 4$) alakú számok esetén. Ez 50 db 5-ös. Ehhez még 6-ot kell adni az 550; 551; $\dots$; 555-ig terjedő számok miatt. Ez is 56 db 5-ös számjegyet jelent.

A százaskok esetén ($500 + 1000k$, $k = 0$) 500; 501; $\dots$; 555-ig is 56 db 5-ös számjegy szerepel. Tehát összesen $3 \cdot 56 = 168$ db 5-ös számjegy szerepel 3-tól 555-ig.

5. Használjuk az ábra jelöléseit!

Az a oldalú szabályos háromszög magassága a Pitagorasz-tétel alapján:

$m = a \frac{\sqrt{3}}{2}$. A szabályos háromszög súlypontja, magasságpontja, a beírt és a köré írt kör középpontja egybeesik. Így a szabályos háromszög m magassága a beírt és a köré írt körök sugarainak az összege: $m = R + r$. A súlypont harmadolja a súlyvonalakat (magasságokat), ezért $R = 2r$.



A feltételek szerint $R - r = r = 4$ cm. A szabályos háromszög magassága: $m = 3r = 12$ cm. Tehát a szabályos háromszög oldala: $a = m \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{24}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}$ cm $\approx 13,86$ cm.

6. Használjuk az ábra jelöléseit!

Az a oldal fölé rajzolt félkör területe: $t_a = \frac{\pi}{8} a^2$.

A b oldal fölé rajzolt félkör területe: $t_b = \frac{\pi}{8} b^2$.

Az c oldal fölé rajzolt félkör területe: $t_c = \frac{\pi}{8} c^2$.

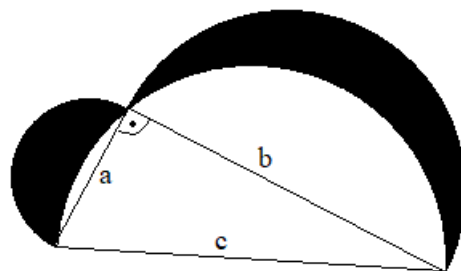
A háromszög területe: $t_\Delta = 0,5ab = 30$ cm².

A holdacskák területe: t_h .

Ekkor $t_\Delta + t_a + t_b = t_h + t_c$.

Ebből $t_h = t_\Delta + (t_a + t_b - t_c) = t_\Delta = 30$ cm².

A zárójelben lévő kifejezés a Pitagorasz-tétel miatt ($a^2 + b^2 = c^2$) nulla.



7. Ábrázoljuk az alábbi egyeneseket!

1. $x = 0$ (y tengely),

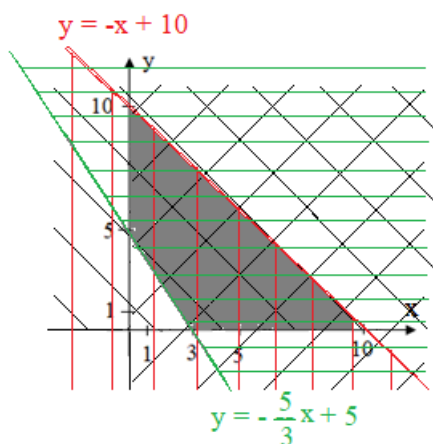
2. $y = 0$ (x tengely),

3. $y = -x + 10$ és

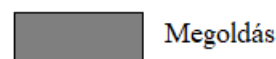
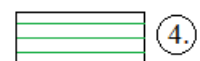
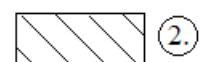
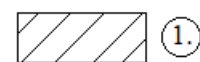
4. $y = -\frac{5}{3}x + 5$.

Az egyenesek segítségével megadjuk az egyes feltételeknek megfelelő

síkrészeket. A 4 feltétel akkor teljesül, ha a síkrészek közös részét vesszük. A megoldást az ábra szemlélteti (a szürkére festett négyszög határvonalai is a megoldáshoz tartoznak).



Jelmagyarázat



8. Az a élű kocka térfogata: $V = a^3$, így az eltávolított kis kockák térfogata: $V_k = \left(\frac{a}{4}\right)^3 = \frac{a^3}{64}$.

A megmaradó test térfogata: $V_t = V - 8V_k = a^3 - \frac{a^3}{8} = \frac{7a^3}{8}$.

Tehát a megmaradó test az eredeti test térfogatának $\frac{7}{8}$ -a ($\frac{7}{8} = 0,875$).

A test felszíne nem változik, mert az eltávolított felületdarabok területével megegyező újabb felületeket hozunk létre. ◀ ◀

1. Legyen a három szám x , y , z !

Ekkor a következő egyenletek írhatók fel: $x + y + z = 33,7$

$$\frac{2}{3}x = \frac{5}{8}y$$

$$\frac{5}{12}y = \frac{7}{18}z$$

Ezekből: $y = 11,2$, $x = 10,5$ és $z = 12$.

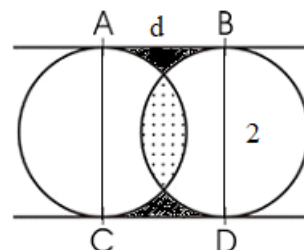
Tehát a három szám a 10,5; 11,2; 12.

2. Jelöljük a két kör középpontjának távolságát d -vel!

A pontozott rész területét T_p -vel, a fekete rész területét T_f -vel.

Ekkor az ABCD téglalap területe: $2d = 2 \cdot \frac{\pi}{2} - T_p + T_f = \pi$, mert a

feltételek szerint: $T_p = T_f$. Ebből $d = \frac{\pi}{2} \approx 1,57$.



3. Jelöljük n -nel az iskola tanulóinak számát!

Ekkor $200 < n < 1000$ és $n - 3$ osztható 6-tal; 7-tel; 8-cal. Tehát $n - 3$ többszöröse ennek a három számnak. Ennek a három számnak a legkisebb közös többszöröse $[6; 7; 8] = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 = 168$.

Ha $n \cdot 168 + 3$ tanuló van egy iskolában, akkor 6-os, 7-es és 8-as sorokba állítva teljesül a feltétel első része.

Ha a létszám 200-nál nagyobb, de 1000-nél kisebb, akkor $200 < n \cdot 168 + 3 < 1000$.

Ahhoz, hogy 9-es sorokba állítva a tanulókat egy sem maradjon soron kívül, szükséges, hogy $n \cdot 168 + 3$ osztható legyen 9-cel.

Ha $n = 1$, akkor $1 \cdot 168 + 3 = 171 < 200$, nem teljesül a feltétel.

Ha $n = 2; 3; 5$, akkor sem teljesül a feltétel.

Ha n nagyobb 5-nél ($6 \cdot 168 = 1008$), nem teljesül a feltétel.

Ha $n = 4$, akkor $4 \cdot 168 + 3 = 675$.

Tehát az iskola tanulóinak létszáma 675.

4. 1997^1 utolsó számjegye 7,

1997^2 utolsó számjegye 9,

1997^3 utolsó számjegye 3,

1997^4 utolsó számjegye 1,

$1997^{1997} = (1997^4)^{499} \cdot 1997^1$ utolsó számjegye 7,

$1997^{1998} = (1997^4)^{499} \cdot 1997^2$ utolsó számjegye 9,

$1997^{1999} = (1997^4)^{499} \cdot 1997^3$ utolsó számjegye 3,

$1997^{2000} = (1997^4)^{500}$ utolsó számjegye 1,

$1997^{2001} = (1997^4)^{500} \cdot 1997$ utolsó számjegye 7,

$1997^{2002} = (1997^4)^{500} \cdot 1997^2$ utolsó számjegye 9. Adjuk össze az utolsó számjegyeket:
 $7 + 9 + 3 + 1 + 7 + 9 = 36$! Tehát az A szám utolsó számjegye 6.

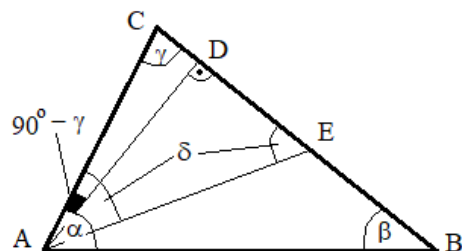
5. Használjuk az ábra jelöléseit!

A feltételek szerint $AEC\Delta$ egyenlő szárú. Számoljuk ki

a δ szöget kétféle módon!

$$\delta = 90^\circ - 0,5\gamma = 0,5(\alpha + 90^\circ - \gamma).$$

Ebből $\alpha = 90^\circ$. Ezt kellett bizonyítani.



6. $n = 4$ esetén a megmaradó test felszíne:

$$(1 + 3 + 5 + 7) + 4 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) + 4 \cdot 4 = 16 + 40 + 16 = 72 \text{ négyzetből áll.}$$

Egy négyzet területe:

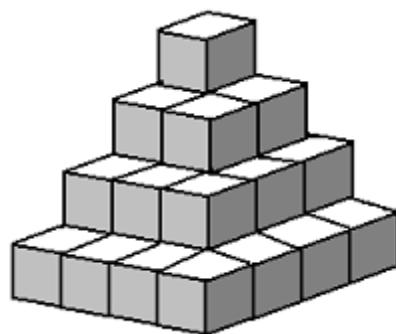
$$T_4 = 4 \cdot 4 = 16 \text{ (cm}^2\text{)}. A_4 = 7 \cdot 2 \cdot 16 = 1152 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

$n = 8$ esetén a megmaradó test felszíne:

$$(1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15) + 4 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 8) + 8 \cdot 8 = 64 + 4 \cdot 36 + 64 = 272 \text{ négyzetből áll.}$$

Egy négyzet területe: $T_8 = 2 \cdot 2 = 4 \text{ (cm}^2\text{)}.$

$$A_8 = 272 \cdot 4 = 1088 \text{ (cm}^2\text{)}.$$



7. Csoportosítsuk az összeg tagjait az alábbi módon!

$$5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5 = 3905 = 5 \cdot 11 \cdot 71.$$

$$5^6 + 5^7 + 5^8 + 5^9 + 5^{10} = 5 \cdot (5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5) = 5^6 \cdot 11 \cdot 71.$$

$$5^{11} + 5^{12} + 5^{13} + 5^{14} + 5^{15} = 5^{10} \cdot (5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5) = 5^{11} \cdot 11 \cdot 71. \text{ Ezt folytatva 1990-ig...}$$

:

$$5^{1986} + 5^{1987} + 5^{1988} + 5^{1989} + 5^{1990} = 5^{1985} \cdot (5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5) = 5^{1986} \cdot 11 \cdot 71.$$

Összeadva a fenti egyenlőségek megfelelő oldalait, azt kapjuk, hogy az

$$A = 11 \cdot 71 \cdot (5 + 5^6 + 5^{11} + \dots + 5^{1986}). \text{ Látható, hogy az A osztható 71-gyel.}$$

8. $2 \cdot (x + y) = x \cdot y$, ahol x és y egész számok.

Átalakítás után az $(x - 2) \cdot (y - 2) = 4$ egyenletet kapjuk. A lehetséges eseteket táblázatba foglalva:

$x - 2$	4	2	1	-1	-2	-4
$y - 2$	1	2	4	-4	-2	-1
x	6	4	3	1	0	-2
y	3	4	6	-2	0	1



1. A beszedett adó:

$$144 + 145 + 146 + \dots + 1143 = 643\,500.$$

Mivel $643\,500 = 4500 \cdot 143$, így szét tudta osztani közöttük egyenlően.

2. Kezdetben $2x$ kg lencsét, és $3x$ kg babot kapott Hamupipőke.

Hozzáadva még 2 kg lencsét $((2x + 2)$ kg), a lencse-bab arány $3 : 2$. Azaz $\frac{2x+2}{3x} = \frac{3}{2}$.

Rendezve az egyenletet: $x = 0,8$.

Tehát $2 \cdot 0,8$ kg + 2 kg = $3,6$ kg lencsét, és $3 \cdot 0,8$ kg = $2,4$ kg babot kellett Hamupipőkének szétválogatnia.

3. Mivel csak a nullának az abszolútértéke nulla, így $||x| - 1| - 1 = 0$. Ebből $|x| = 1$.

Mivel az 1 -nek és a -1 -nek is 1 az abszolútértéke, így két eset van:

I. eset: $|x| - 1 = 1 \rightarrow |x| = 2$. Ebből $x_1 = 2$ és $x_2 = -2$.

II. eset: $|x| - 1 = -1 \rightarrow |x| = 0$. Ebből $x_3 = 0$.

Tehát az egyenletnek három megoldása van : -2 , 0 és 2 .

4. Használjuk az ábra jelöléseit!

Az AE_1O_1 derékszögű háromszög O_1 -nél lévő szöge 60° -os. Így, ha a háromszöget az AE_1 egyenesre tükröznénk, szabályos háromszöget kapnánk. Ebből következik, hogy

$$AO_1 = 2O_1E_1 = 2r_1 = 2 \text{ egység.}$$

Hasonlóan az AO_2E_2 háromszögben:

$$2O_2E_2 = AO_2, \quad 2r_2 = AO_1 + r_1 + r_2.$$

$$\text{Ebből } r_2 = AO_1 + r_1 = 3 \text{ egység.}$$

Folytatva az eljárást a harmadik körre:

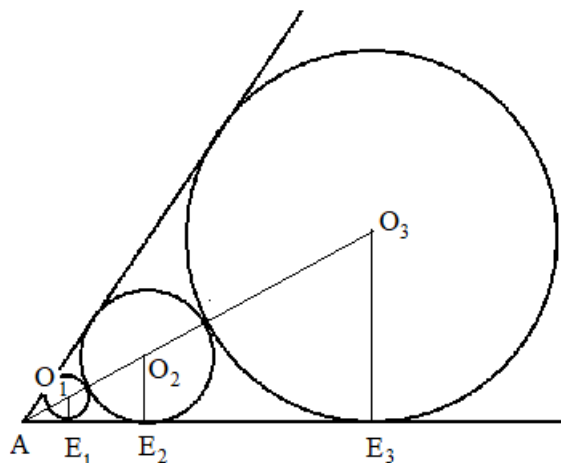
$r_3 = 9 (= 3^2)$ egység, a negyedik körre: $r_4 = 27 (= 3^3)$ egység, azaz az újabb kör sugara mindig az előző háromszorosára nő.

Így a tizedik kör sugara, ha az egységnyi sugarú kör sugara a legkisebb:

$$r_{10} = 3^9 = 19683 \text{ egység.}$$

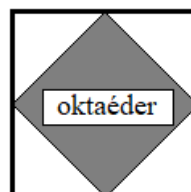
Ha a megadott egységnyi sugarú kör a legnagyobb sugarú, akkor pedig a tizedik kör sugara

$$3^{-9} = \frac{1}{19683} \text{ egység.}$$



5. Vágjuk két egyenlő részre a kockát az alaplap síkjával párhuzamos síkkal!

Ekkor a metsző síknak az oktaéderrel alkotott közös része egy olyan négyzet, amelynek a területe az alapnégyzet területének a fele. Az oktaéder két olyan gúlából áll, amelyek közös alapja az előbbi négyzet. A két gúla magasságának



összege a kocka magasságával egyezik meg. A gúla térfogata az alapterület és a magasság szorzatának a harmada. Így az oktaéder és a kocka térfogatának aránya: $1 : 6 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \right)$.

6. Tegyük fel, hogy az A bolygóhoz legközelebb a B bolygó van, a B bolygóhoz legközelebb a C, a C-hez a D, a D-hez az E, az E-hez az F, és az F-hez a G! Ez egyben azt is jelenti, hogy $AB > BC > CD > DE > EF > FG$. Ekkor az A bolygó csillagásza a B bolygót figyeli, a B-é a C-t, stb., az F-é a G-t.

Ahhoz, hogy minden bolygót figyeljen valaki, a G bolygó csillagászának A-t kellene figyelnie. Ehhez G-nek közelebb kellene lennie A-hoz, mint bármely más bolygóhoz, így fenn kellene állnia az $FG > AG$ egyenlőtlenségnek. Az előbbiektől viszont ekkor $AB > AG$ is fennállna, így az A bolygó csillagásza nem figyelhetné a B bolygót. Tehát kell, hogy legyen olyan bolygó, amit senki sem figyel.

7. Készítsün halmazábrát a feladat állításai alapján!

12-en szeretik a fagyaltot és a palacsintát, de közülük 2 nem szereti a matematikát, azaz 10-en szeretik mindhármat.

A matematikát szeretők közül 7 nem szereti a fagyaltot, így $(22 - 7 =)$ 15-en szeretik a matematikát és a fagyaltot. 10 fő mindhármat szereti, tehát a csak a matematikát és a fagyaltot szeretők száma 5.

A matematikát szeretők közül 8 nem szereti a palacsintát, így $(22 - 8 =)$ 14-en szeretik a matematikát és a fagyaltot. 10 fő mindhármat szereti, tehát a csak a matematikát és a palacsintát szeretők száma 4.

Ezek után már meghatározhatjuk a (csak 1 igennel válaszoló számát):

csak a matematikát kedvelők számát: 3;

csak a fagyaltot kedvelők számát: 1 és

csak a palacsintát kedvelők számát: 2.

Ha összeadjuk a halmazábrában szereplő számokat, akkor megkapjuk a legalább egy igennel válaszoló számát: $3 + 5 + 1 + 4 + 10 + 2 + 2 = 27$.

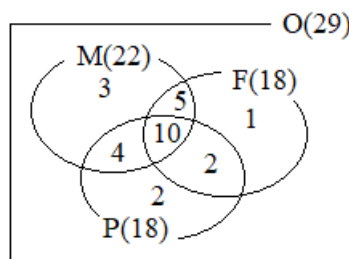
Tehát $2 (= 29 - 27)$ fő felelt mindhárom kérdésre nemmel.

8. A kockák száma legyen x !

Ekkor $p = \frac{13}{72}x$, $f = \frac{25}{48}x$. $z = x - p - f = \frac{43}{144}x < 1000$, ebből $x < 3348,83$.

Ahhoz, hogy p , f és z egészek legyenek, x -nek oszthatónak kell lennie 72-vel, 48-cal és 144-gyel. Ezek legkisebb közös többszöröse a 144.

Másrészt: mivel a nagy kocka x db kis kockából áll, x -nek köbszámnak kell lennie.



Jelölés:

O: osztály

M: szereti a matematikát

F: szereti a fagyaltot

P: szereti a palacsintát

A 3348-nál kisebb, 144-nél nagyobb köbszámok:

216, 343, 512, 729, 1000, 1331, 1728, 2197 és 2744.

Ezek közül az 1728 osztható 144-gyel.

Tehát 1728 kockából áll a nagy kocka, ebből $p = 312$ a piros, $f = 900$ a fehér,

és $z = 1728 - (312 + 900) = 516$ a zöld.  

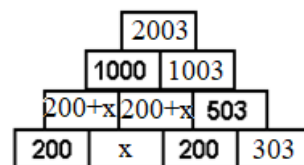
1. Foglalkozzunk táblázatba az adatokat!

eredeti ár (Ft)	1. árváltozás után (Ft)	2. árváltozás után (Ft)
x	$\frac{9}{8}x$	$0,9 \cdot \frac{9}{8}x$

A feltételek szerint $0,9 \cdot \frac{9}{8}x = 1620$. Ebből $x = 1600$. Tehát a CD-lemez eredeti ára 1600 Ft volt.

2. A piramis jobb alsó sarkában lévő számot könnyen kitalálhatjuk.

Ha az alsó sor 2. elemét x -szel jelöljük, akkor látható, hogy a 2. sorban az 1000 két egyenlő szám összege. Így $200 + x = 500$ -ból $x = 300$. Az 1000 mellett 1003 állhat. Tehát a piramis csúcsán álló szám a 2003.

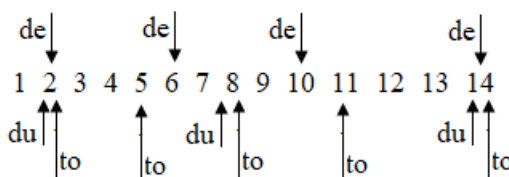


3. Használjuk az ábra jelöléseit!

de: délelőtt esett a hó; du: délután esett a hó;

to: ebédre torta is volt. Nyilakkal megjelöltük azokat a napokat, amelyeken az előző események

bekövetkeztek. Az ábráról a válaszok egyszerűen leolvashatók.



a) Mindhárom esemény a tábor végén, a 14. napon fordult elő legközelebb.

b) A két hét során kétszer fordult elő, hogy délelőtt és délután is havazott.

4. Az eredeti szám: $\overline{abc3} = 10\overline{abc} + 3$.

A 3-as számjegy áthelyezése után kapott szám: $\overline{3abc} = 3000 + \overline{abc}$.

A feltételek szerint: $3000 + \overline{abc} = 10\overline{abc} + 3 + 1197$. Ebből $\overline{abc} = 200$. Tehát a 2003-at írtuk eredetileg a táblára.

5. A $3^3 = 27$ kis kocka éleinek hosszát jelöljük a -val! Ekkor egy kis kocka felszíne $6a^2$. A kis kockák felszínének összege: $27 \cdot 6a^2 = 3 \cdot 54a^2$. Az eredeti kocka felszíne, amely festett, $6(3a)^2 = 54a^2$. A festetlen lapok területének összege: $3 \cdot 54a^2 - 54a^2 - 2 \cdot 54a^2$. Így a festetlen lapok területének összege 200 %-a festett lapok területösszegének.

6. Jelölje a keresett kétjegyű számot $\overline{xy} = 10x + y$, ahol x, y számjegyek, és $x \neq 0$! A feltételek szerint: $10x + y - x - y = 9x = 13$. x nem lehet $\frac{13}{9}$. Így Abdul soha nem fog kiszabadulni.

7. 2002 hatványainak végződése: 2; 4; 8; 6; 2; 4; 8; 6; 2; 2003 hatványainak végződése: 3; 9; 7; 1; 3; 9; 7; 1; 3; Vegyük észre, hogy mindkét esetben 4 hosszúságú szakasz ismétlődik! Mivel $2003 = 500 \cdot 4 + 3$, így 2002^{2003} utolsó számjegye $2^3 = 8$. Hasonló gondolatmenet után 2003^{2002} utolsó számjegye 9. Tehát az összeg utolsó számjegye 7.

8. Használjuk az ábra jelöléseit!

Tükrözzük az A pontot a patakpartra (t egyenes)!

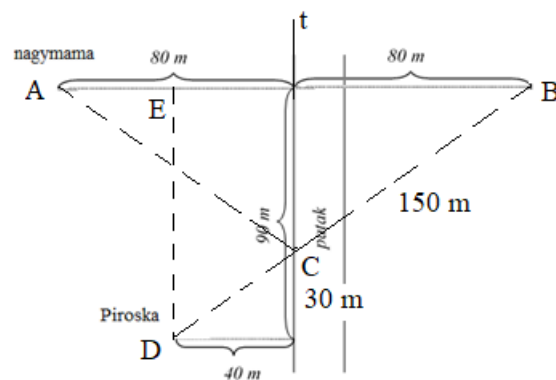
Az így kapott B pont és a D pont távolsága a BDE derékszögű háromszögből meghatározható:

$$90^2 + 120^2 = BD^2, BD = 150 \text{ m.}$$

A tükrözés miatt $BC = AC$.

Két pont között (B és D) a legrövidebb út az egyenes. Így Piroskának a C pontban kell érintenie a patakot, és a legrövidebb út hossza

150m. ◀ ◀



1. Ha az utolsó kézfogás után az ördög 27 garast kapott, akkor az utolsó háromszorozás előtt 9 garasa volt a szegény embernek. Hasonlóan gondolkodva: A második kézfogás után 36 garasa, előtte 12 garasa, míg az első kézfogás után 39, előtte 13 garasa volt a szegény embernek.

Tehát találkozásukkor a szegény ember zsebében 13 garas volt.

2. Az első háromszög egy szabályos háromszög „fele”, így szögei: 30° , 60° , 90° .

Egy háromszög külső szögeinek összege 360° . A másik háromszög külső szögeinek arányából felírható: $3x + 4x + 5x = 360^\circ$. Ebből $x = 30^\circ$.

Így e háromszög szögei: 30° , 60° , 90° . Mivel a két háromszög belső szögei rendre megegyeznek, így a két háromszög hasonló.

3. Egy háromjegyű szám számjegyeinek szorzata pontosan akkor páratlan, ha minden számjegye páratlan.

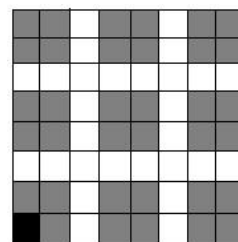
5 darab páratlan számjegy van, mindegyikük kerülhet az egyesek, tízesek, százask helyére.

Így összesen $5^3 = 125$ ilyen szám van.

4. Színezzük a sakktáblát az ábra szerint!

A fekete szín a kivágást jelzi. Egy dominót lerakunk.

Ez a táblán minden esetben páros (0 vagy 2) szürke mezőt fed le. De az ábrán 35 darab szürke mező van. Így nem fedhető le a tábla 1×3 -as dominókkal.



5. Jelöljük x -szel azt az időt, ami még hátravan a dolgozatírásból, amikor Sanyi először az órájára pillantott!

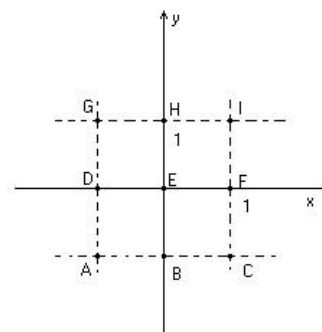
Ekkor az alábbi összefüggés írható fel: $2x + x = (2x + 5) + \frac{2x + 5}{5}$. Ennek megoldása: $x = 10$.

A dolgozat tehát 30 perces.

6. 1. eset: Ha a háromszög valamelyik oldala párhuzamos valamelyik tengellyel.

Legyen ez a tengely az x tengely! Megválasztása nem befolyásolja a lehetséges területértékeket.

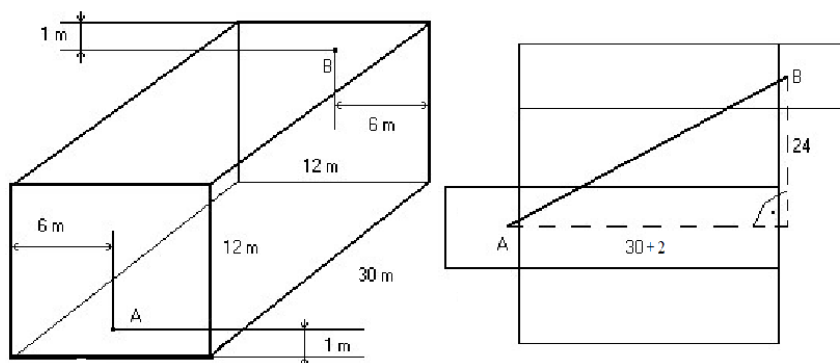
Ekkor a háromszög ezen oldalához tartozó magassága párhuzamos az y tengellyel. Mivel a háromszög csúcsai rácspontok, így mind az oldal, mind a magasság értéke 1 vagy 2 lehet. Így a háromszög területe 0,5; 1; 2 lehet. Mindegyikre mutatunk példát: ABE, ACE, ACH háromszögek.



2. eset: Ha a háromszög egyik oldala sem párhuzamos a tengelyek valamelyikével. Ekkor az oldalak az egységnégyzet, vagy a kétegységnyi területű téglalap átlója lehetnek. Egyetlen ilyen háromszög konstruálható, melynek területe: $2 - 1 - 1 - 0,5 = 1,5$. (Pl. BFG háromszög).

Több eset nincs. Így a háromszög területe 4 különböző értéket vehet fel: 0,5; 1; 1,5; 2 lehet.

7. . Készítsük el az alábbi hálózati rajzot!



Írjuk fel a Pitagorasz-tételt: $\sqrt{32^2 + 24^2} = 40!$

Más hálózati rajzokat készítve 40 m-nél hosszabb értéket kapunk.

A legrövidebb huzal 40 méteres.

8. A (3) feltétel alapján: $6 = 6 \cdot 1 = 3 \cdot 2$.

A $6 \cdot 1$ felbontás megfelel a (2) feltételnek. Az (1)-et figyelembe véve 16 mindhárom feltételnek eleget tesz.

A $3 \cdot 2$ felbontás akkor tesz eleget a (2) feltételnek, ha kiegészítjük a szorzatot két db 1-es szorzótényezővel: $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1$.

Az 1, 1, 2, 3 számjegyekből alkotott számok közül az 1312 és a 3112 tesz eleget az (1)-es feltételnek is.

Így a feladatnak 3 megoldása van: 16; 1312 és 3112. [▶](#) [«](#)

1. Anna dióinak száma legyen x !

Ekkor Béla dióinak száma $1,5x$, Cili dióinak száma $4x/3$.

A feltételek szerint: $x + 1,5x + 4x/3 = 46$. Ebből $x = 12$.

Tehát Anna 12, Béla 18, Cili 16 diót kap.

2. Legyen a rettek száma x !

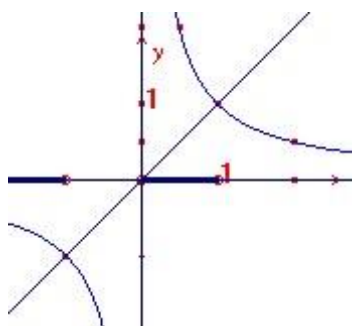
A feladat szerint a 6, a 7 és a 8 osztója $x + 1$ -nek. $[6; 7; 8] = 168$.

Így az $x + 1$ a 168 valamilyen pozitív egész számú többszöröse.

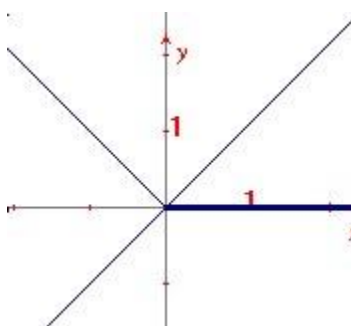
Mivel x kisebb 500-nál, $x+1$ lehetséges értékei: 168 és $2 \cdot 168 = 336$.

Tehát a kosárban vagy 167, vagy 335 darab rettek van.

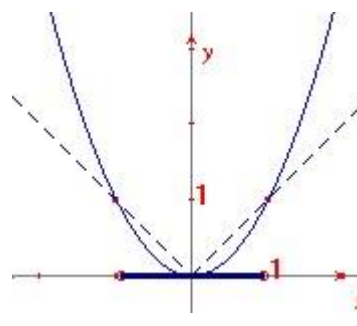
3. Ábrázoljuk a feladatban szereplő függvényeket!



$x < -1$ vagy $0 < x < 1$



$0 \leq x$



$-1 < x < 0$ vagy $0 < x < 1$

4. a) Nem, mert a számjegyeinek az összege 3, így osztható 3-mal.

b) Bármelyik az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek pontosan egyszeri felhasználásával alkotott 6 jegyű számot is tekintjük, a számjegyek összege mindig ugyanannyi: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 = 3 \cdot 7$. Így egyik szám sem lehet prím.

5. Legyen n a kocka élének a hossza centiméterekben mérve! Pontosan 3 lapja piros a kocka csúcaiban levő kis kockáknak. Ezek száma 8.

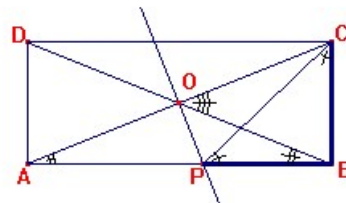
Pontosan két lapja piros a kocka élei mentén elhelyezkedő azon kis kockáknak, amelyek nem csúcsban vannak. Egy él mentén ezek száma $n - 2$. Mivel a kockának 12 éle van, a számuk összesen: $12(n - 2)$.

A feltétel szerint: $12(n - 2) = 12 \cdot 8$. Innen $n = 10$.

Tehát a kocka éle 10 cm hosszú.

6. Használjuk az ábra jelöléseit!

Mivel a CPB háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög, így a CPB szög $= 45^\circ$. Az APC szög ennek kiegészítő szöge, ezért 135° -os. Mivel az OP egyenese az AC szakasz felezőmerőlegese, ezért az APC háromszög is egyenlő szárú. Ezért a CAP szög $0,5(180^\circ - 135^\circ) = 22,5^\circ$. Az ABO háromszög is egyenlő szárú. Így az ABO szög is $22,5^\circ$. Az átlók által bezárt szög az ABO háromszög külső szöge. Tehát a BOC szög $= 22,5^\circ + 22,5^\circ = 45^\circ$.



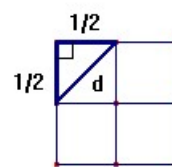
7. Használjuk az ábra jelöléseit!

Bontsuk fel a négyzetet a szemközti oldalak felezőpontjainak összekötésével 4 db 0,5 oldalú kis négyzetre! Mivel 5 pontot kell elhelyeznünk, minden esetben

lesz legalább egy olyan kis négyzet, amelybe legalább 2 pont esik. Két, ugyanabban a kis négyzetben levő pont akkor van a legtávolabb egymástól, ha

az egyik átló két végpontjában vannak. Ez a maximális távolság, amely a Pitagorasz-tétel

alapján $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Így mindig van az 5 pont közül 2 olyan pont, amelyek távolsága nem nagyobb $\frac{\sqrt{2}}{2}$ -nél.

8. a) A feladat szerint, ha 29 golyót veszünk ki, még nem biztos, hogy mind a 4 szín szerepel a kiválasztott golyók között. Ez úgy lehetséges, hogy mind a 29 golyót a három magasabb elemszámú színből választjuk, a legkisebb elemszámúból pedig egyet sem. A legkisebb elemszám tehát: $36 - 29 = 7$. Azaz mindegyik színből legalább 7 golyó kell, hogy legyen.

b) Egy színből akkor lehet a legtöbb golyó, ha a többi három színből a lehető legkevesebb, azaz 7 db van. A legnagyobb lehetséges elemszám tehát: $36 - 3 \cdot 7 = 15$.

Legfeljebb 15 golyó lehet egy színből.  

1. Használjuk az ábra jelöléseit!

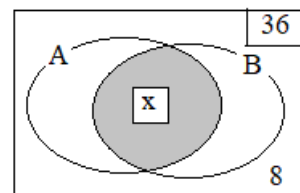
x az almatortát és borjúsültet egyaránt fogyasztók számát jelöli.

36 kétharmada 24. Tehát $|A| = 24$. 36 ötkilencede 20. Így $|B| = 24$.

A feltételek szerint: $|A \cup B| = 36 - 8 = 28 = |A| + |B| - x$. Ebből

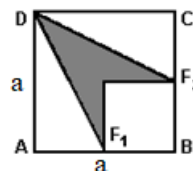
$x = 16$.

Tehát 16 fő rendelt almatortát és borjúsültet is.



2. Használjuk az ábra jelöléseit! A négyzet oldalának hossza a .

Ekkor a kis négyzet, az ADF_1 és $CD F_2$ háromszögek területe $0,25 \cdot a^2$. Így a befestett négyszög területe a négyzet területének negyedrésze.



3. A 3 literes kanna felhasználásával kétszer 3 liter tejet áttölt a 10 literes kannából a 7 literes kannába. Ezután harmadszor is teletölti a 3 literes kannát. Így a 10 literes kannában 1 liter tej marad.

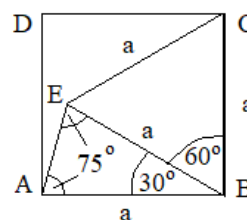
4. Jelölje Zsuzsanna asszony életkorát x ! Ekkor a feltételek szerint: $\frac{4}{3} \cdot \frac{120 - x}{2} = x$. Ebből

$x = 48$.

Ellenőrzés: $\frac{4}{3} \cdot \frac{120 - 48}{2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{72}{2} = 48$. Zsuzsanna asszony 48 éves.

5. Használjuk az ábra jelöléseit! Ekkor $a = 10$ cm.

Vegyük észre, hogy az $ABE \Delta$ E csúcsánál lévő szög is 75° ! Így az $ABE \Delta$ BE oldala egyenlő az $AB = a$ oldallal. A $BCE \Delta$ szabályos, mert $BE = BC = a$, és a két oldal által bezárt szög 60° . Tehát a CE távolság 10 cm.



6. Használjuk az ábra jelöléseit!

Ekkor az $a + b + c = 19$;

$b + c + 8 = 19$;

$c + 8 + d = 19$ egyenletekből $d = b$ következik.

a	b	c	8	d	e	f	g	h	i	j	6		
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	--	--

Ezt felhasználva folytassuk az egyenletek felírását!

A $8 + b + e = 19$ egyenletből kapjuk, hogy $e = c$. A $b + c + f = 19$ egyenletből kapjuk, hogy $f = a = 8$. A további egyenletekből hasonlóan

kapjuk, hogy $g = b$, $h = c$, $i = a = 8$, $j = b$, $c = 6$

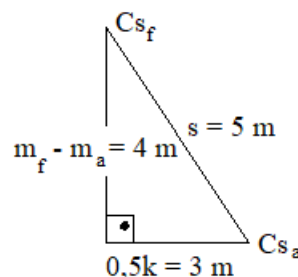
8	5	6	8	5	6	8	5	6	8	5	6	8	5
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

és $b = 5$. A megoldást az ábra szemlélteti.

7. Terítsük ki a henger palástját, és használjuk az ábra jelöléseit!

Ekkor $k = 6$ m, $m_f = 4,56$ m és $m_a = 0,56$ m. Ha a csigák a legrövidebb úton haladnak, akkor az ábrán látható derékszögű háromszög átfogója mentén kell haladniuk. Ennek a hossza a Pitagorasz-tétel alapján: $s = 5$ m. Ha kétszer akkora sebességgel haladunk, akkor ugyanannyi idő alatt a megtett út kétszer akkora. Így

a felső csiga $\frac{10}{3}$ m, az alsó csiga $\frac{5}{3}$ m hosszúságú utat tesz meg a találkozásig.



8. A keresett szám csak négyjegyű szám lehet, mert a legnagyobb háromjegyű szám a 999, a legkisebb ötjegyű szám a 11 111. Mivel 4 számjegy összege maximum 36 lehet, ezért a keresett szám legalább 1968. Jelöljük a keresett számot $\overline{19ab} = (1900 + \overline{ab})$ -vel! Ekkor a feltételek szerint:

$$\overline{19ab} + 10 + a + b = 1900 + \overline{ab} + 10 + a + b = 1910 + 11a + 2b = 2004.$$

Rendezés után: $94 - 2b = 11a = 2(47 - b)$. Ebből $b = 3$ és $c = 8$ adódik.

Ha $a = 2$, akkor $\overline{20ab} = (2000 + \overline{ab})$ alakú lehet a keresett szám.

$2002 + 11a + 2b = 2004$. Ebből $a = 0$ és $b = 1$ adódik.

Tehát a keresett számok a 1983 ($1983 + 1 + 9 + 8 + 3 = 2004$) és a 2001 ($2001 + 2 + 1 = 2004$).

Ezek meg is felelnek a feltételnek. ◀ ◀

A feladatok elkészítéséhez az alábbi kiadványokból vettem ötleteket és feladatrészeket.

Elemi matematikai példatár tanítóképző főiskolák számára
Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest

Erdős Gábor: Nemzetközi Kenguru Matematika Verseny füzetek
Zalai Matematikai Tehetségekért Alapítvány

Zrínyi Ilona Matematikaverseny (feladatai, megoldásai és eredményei) füzetek
MATEGYE Alapítvány, Kecskemét

Gombos Éva - Somogyi László: Matematika Határok Nélkül
SCOLAR KIADÓ, Budapest

Róka Sándor: 2000 feladat az elemi matematika köréből
Typotex Kiadó, Budapest

